» 10.
» 11.
» 12.
» 13.
» 20.
» 21.
» 23.
» 24.
» 25.
» 31.
» 37.
» 40.

Drei Abhandlungen

über

KARTENPROJECTION

von

LEONHARD EULER.

(1777.)

Herausgegeben

von

A. Wangerin.

Mit 9 Textfiguren.

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1898.

I.

Ueber die Abbildung einer Kugelfläche in einer Ebene.

(De repraesentatione superficiei sphaericae super plano.)

Von

Leonhard Euler.

[Acta Acad. Scient. Imperial. Petropolitanae pro anno MDCCLXXVII, T. I, p. 107—132.]

---

§ 1. Im Folgenden betrachte ich nicht nur optische Projectionen, mittelst deren die verschiedenen Punkte einer Kugelfläche so in einer Ebene abgebildet werden, wie sie einem an einem bestimmten Orte befindlichen Beobachter erscheinen, d. h. Abbildungen, bei denen die einzelnen Punkte, die der Beobachter sieht, nach den Gesetzen der Perspective auf eine Ebene projicirt werden: vielmehr fasse ich das Wort Abbildung im weitesten Sinne auf, so dass die einzelnen Punkte der Kugelfläche nach einem beliebigen Gesetze in einer Ebene dargestellt werden; dabei entspricht jedem Punkte der Kugel ein bestimmter Punkt der Ebene und umgekehrt, falls nicht etwa der Fall eintritt, dass die Bilder gewisser Kugelpunkte imaginär werden.

§ 2. Es möge die Figur abc (Fig. 1 auf folg. S.) eineb Theil einer Kugelfläche darstellen, deren Pol im Punkte b liegt, während alc der Aequator ist. ab sei der Anfangst, meridian, von dem aus, wie es in der Geographie üblich in die Längen der einzelnen Punkte der Kugel gerechnet werden. Wir betrachten irgend einen Punkt p, der auf dem Meridian

bpl liege; letzterer bildet mit dem Anfangsmeridian den Winkel abl, der gleich dem Bogen al des Aequators ist und mit t bezeichnet werden möge. Die Breite jenes Punktes ist der Bogen $lp = u$. Als Einheit der Länge soll der Kugelradius angenommen werden.

Fig. 1.

Fig. 2.

In Figur 2 möge ferner die Ebene der Zeichnung diejenige Ebene sein, in [108] der die Abbildung liegen soll, und P sei derjenige Punkt, der dem Punkte p der Kugel entspricht. Von P sei auf die Abscissenaxe EF, deren Lage beliebig angenommen werden kann, das Loth PX gefällt, und es werde, auf den Punkt E als Anfangspunkt bezogen, die Abscisse $EX = x$ und die Ordinate $XP = y$ gesetzt. Da unserer Annahme gemäss die Lage des Punktes P sich nach irgend einem Gesetze aus der des Punktes p der Kugel ergeben soll, die Lage von p aber durch die beiden Variabeln t und u bestimmt ist, so muss man die Coordinaten x und y als Functionen jener beiden Variabeln t und u ansehen. Unsere Untersuchung gehört mithin dem Theile der Analysis an, der sich mit Functionen von zwei Veränderlichen beschäftigt.

§ 3. Wir wollen nunmehr die Veränderlichkeit der beiden Grössen t und u in Rechnung ziehen. Dazu betrachten wir auf der Kugel den Punkt q (Fig. 1), dessen Länge $= t$, während seine Breite $= u + du$ ist. Ferner sei r der Punkt, dessen Länge $t + dt$ und dessen Breite $l'r = u$ ist. Vervollständigen wir die Figur zu dem Parallelogramm $pqsr$, so hat s die Länge $t + dt$ und die Breite $u + du$. Auf der Kugel haben wir dann die Bogenelemente $pq = du$ und $ll' = dt$, daher wird das Bogenelement $pr = dt \cdot \cos u$.

Ferner ist das Parallelogramm $pqsr$ ein Rechteck, mithin seine Diagonale

$$ps = \sqrt{du^2 + dt^2 \cdot \cos^2 u}.$$

§ 4. Weiter mögen den auf der Kugel liegenden Punkten p, q, r, s in der Ebene die Punkte P, Q, R, S entsprechen; und die von letzteren auf die Abscissenaxe gefällten Lothe seien PX, QU, RV und SW. Da der Punkt Q dadurch aus P entsteht, dass nur die Variable u um das Element du geändert wird, [während t ungeändert bleibt], so haben die Coordinaten von Q folgende Werthe:

$$EU = x + du\left(\frac{dx}{du}\right), \quad UQ = y + du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Ebenso ist, da der Punkt R aus P dadurch entsteht, dass t allein geändert wird, die Abscisse dieses Punktes

$$EV = x + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

und seine Ordinate

$$VR = y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Endlich ist die Abscisse des Punktes S, der durch die gleichzeitige Aenderung von t und u aus P entsteht,

$$EW = x + du\left(\frac{dx}{du}\right) + dt\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

[**109**] und seine Ordinate

$$WS = y + du\left(\frac{dy}{du}\right) + dt\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Daraus erhellt, dass

$$XU = du\left(\frac{dx}{du}\right)$$

ist, und dass die Strecke

$$VW = du\left(\frac{dx}{du}\right)$$

die gleiche Grösse hat. Ebenso wird

$$WS - VR = UQ - XP = du\left(\frac{dy}{du}\right).$$

Hieraus aber folgt, dass das Linienelement RS gleich dem

Elemente PQ ist, und ebenso wird PR gleich QS, das Viereck $PQSR$ mithin ein Parallelogramm.

§ 5. Wir wollen zunächst die Seiten des Elementarrechtecks $pqsr$ auf der Kugel mit denen seines Bildes in der Ebene, d. h. mit den Seiten des Parallelogramms $PQSR$ vergleichen. Für die letzteren haben wir [nach § 4] die Werthe:

$$PQ = du\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}, \quad PR = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

während

$$pq = du, \quad pr = dt \cdot \cos u$$

war. Nun stellt aber PQ in der Bildebene die Richtung des Meridians [von P] dar, und dabei entspricht das Element PQ einem Meridianbogen von der Länge du. Ferner stellt PR die Richtung des Parallelkreises dar, und zwar entspricht das Element PR einem Parallelkreisbogen von der Länge $dt \cdot \cos u$. Wenn daher die Functionen x und y so beschaffen wären, dass

$$du = du\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}$$

und

$$dt \cdot \cos u = dt\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

wäre, so würden sowohl die Meridiane als die Parallelkreise in der Bildebene dieselbe Grösse haben wie auf der Kugel. Dabei könnte indessen immer noch zwischen der Kugelfläche und ihrem Bilde ein Unterschied bestehen, und zwar ein um so grösserer, je mehr die Winkel in der Ebene sich von rechten Winkeln unterscheiden.

§ 6. Das führt uns darauf, die Lage des Meridians PQ und des Parallelkreises PR in Bezug auf die Coordinatenaxen x, y zu untersuchen. Aus der Figur ergiebt sich, dass das Meridianelement PQ mit unserer Axe EF einen Winkel bildet, dessen Tangente $= \left(\frac{dy}{du}\right) : \left(\frac{dx}{du}\right)$ ist. Ebenso bildet die Richtung des Parallelkreises PR mit EF einen Winkel, dessen Tangente $= \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)$ ist. Die Differenz dieser Winkel giebt nun den Winkel [**110**] QPR, unter dem der

Parallelkreis gegen den Meridian geneigt ist, und die Tangente des letzteren Winkels ist

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{du}\right)-\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)}.$$

Soll dieser Winkel QPR ein rechter sein, wie auf der Kugel, so muss

$$\left(\frac{dx}{du}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)+\left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)=0$$

sein oder

$$\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

§ 7. Würde nun verlangt, dass die Figur $PQSR$ in der Ebene der Figur $pqsr$ auf der Kugel congruent sein soll, so müssten folgende drei Bedingungen erfüllt sein: Es müsste 1) $PQ = pq$, 2) $PR = pr$ sein, und 3) müsste Winkel $QPR = qpr = 90^\circ$ werden. Es müssten demnach folgende drei Gleichungen bestehen:

$$\text{I.}\quad \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}=1 \quad\text{oder}\quad \left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2=1,$$

$$\text{II.}\quad \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\cos u \quad\text{oder}\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\cos^2 u,$$

$$\text{III.}\quad \left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right):\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Setzt man noch

$$\left(\frac{dy}{du}\right):\left(\frac{dx}{du}\right)=\operatorname{tang}\varphi,$$

so müsste nach nach Gleichung III

$$\left(\frac{dy}{dt}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\operatorname{cotg}\varphi,$$

also

$$\left(\frac{dy}{du}\right)=\left(\frac{dx}{du}\right)\operatorname{tang}\varphi \quad\text{und}\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right)\operatorname{cotg}\varphi$$

sein, und die Einsetzung dieser Werthe in die beiden ersten Gleichungen würde ergeben:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \cos^2\varphi \text{ und } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2\varphi \cos^2 u.$$

Offenbar aber können die obigen drei Bedingungen unter keinen Umständen gleichzeitig erfüllt werden, da eine Kugelfläche bekanntlich auf keine Weise sich genau in einer Ebene abbilden lässt[1]).

§ 8. Um die Differentialausdrücke aus der Rechnung fortzuschaffen, wollen wir jetzt folgende Substitutionen machen:

$$\left(\frac{dx}{du}\right) = p, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right) = q, \quad \left(\frac{dy}{du}\right) = r, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = s,$$

so dass

$$dx = p\,du + q\,dt, \quad dy = r\,du + s\,dt$$

wird. [111] Dann ist vor Allem erforderlich, dass die letzteren beiden Ausdrücke exacte Differentiale sind[2]); und das ist der Fall, wenn p, q, r, s solche Functionen der Variabeln t und u sind, dass

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right) \text{ und } \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right)$$

wird. Ausserdem nehmen die oben für die Linienelemente gefundenen Ausdrücke folgende Form an:

$$PQ = du\sqrt{p^2 + r^2}, \quad PR = dt\sqrt{q^2 + s^2}.$$

Ferner ist die Tangente des Neigungswinkels von PQ gegen die Axe $= \frac{r}{p}$ und die Tangente des Winkels, den PR mit der Axe bildet, $= \frac{s}{q}$; endlich ist die Tangente des Winkels QPR

$$= \frac{qr - ps}{pq + rs}.$$

§ 9. Nach Einführung dieser Bezeichnungen werden die Bedingungen, die eine vollkommen genaue Abbildung erfüllen müsste, folgende:

I. $p^2 + r^2 = 1$; II. $q^2 + s^2 = \cos^2 u$; III. $\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}$.

Setzt man hierin

$$\frac{r}{p} = \operatorname{tang} \varphi\,,$$

so wird

$$\frac{s}{q} = -\operatorname{cotg} \varphi\,,$$

d. h.

$$r = p \operatorname{tang} \varphi\,, \quad s = -q \operatorname{cotg} \varphi\,,$$

und die beiden ersten Bedingungen geben

$$p^2 = \cos^2 \varphi\,, \quad q^2 = \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 u\,,$$

woraus

$$p = \cos \varphi\,, \quad q = -\sin \varphi \cos u$$

und weiter

$$r = \sin \varphi\,, \quad s = \cos \varphi \cdot \cos u$$

folgt. Nach Substitution dieser Werthe werden die Ausdrücke, die exacte Differentiale sein müssen, folgende:

$$dx = du \cos \varphi - dt \sin \varphi \cos u\,,$$
$$dy = du \sin \varphi + dt \cos \varphi \cos u\,;$$

und da hierzu erforderlich ist, dass

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{dq}{du}\right), \quad \left(\frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{ds}{du}\right)$$

wird, so ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$\text{I.} \quad -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \sin \varphi = \sin u \sin \varphi - \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u \cos \varphi\,,$$

$$\text{II.} \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \cos \varphi = -\sin u \cos \varphi - \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u \sin \varphi\,.$$

[112] Addirt man diese Gleichungen, nachdem man I. mit $\cos \varphi$, II. mit $\sin \varphi$ multiplicirt hat, so ergiebt sich:

$$0 = \left(\frac{d\varphi}{du}\right) \cos u\,, \text{ d. h. } \left(\frac{d\varphi}{du}\right) = 0\,;$$

φ darf also nur von der Variabeln t abhängen. Combinirt man aber die Gleichungen noch auf eine andere Art, indem

man sie addirt, nachdem man I. mit $-\sin\varphi$, II. mit $\cos\varphi$ multiplicirt hat, so erhält man

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = -\sin u;$$

es müsste demnach $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ von u abhängen, was dem vorigen Resultate widerspricht. Damit ist auch durch Rechnung abgeleitet, dass eine vollkommen genaue Abbildung der Kugel in einer Ebene nicht möglich ist.

§ 10. Da hiernach eine vollkommen genaue Abbildung gänzlich ausgeschlossen ist, sind wir schlechterdings auf Abbildungen angewiesen, die nicht ähnlich sind, und bei denen die Figur in der Ebene von der abzubildenden Figur auf der Kugel irgendwie abweicht. In Betreff der Abweichung des Bildes von der Wirklichkeit können wir verschiedene Annahmen machen; und je nach der Annahme, die wir zu Grunde legen, können wir es erreichen, dass die Abbildung für diesen oder jenen Zweck am geeignetsten wird. Dabei können die Bedingungen, denen die Abbildung genügen soll, auf die mannigfachste Art variirt werden. Von den unendlich vielen Möglichkeiten, die sich so ergeben, sollen im Folgenden einige besonders wichtige eingehender behandelt werden. Dabei wollen wir vor Allem annehmen, dass die Winkel, welche die Meridiane mit den Parallelkreisen bilden, überall rechte sind. Denn wenn wir auch schiefe Winkel zulassen wollten, würde die Abbildung eine ganz unzweckmässige werden. Somit wollen wir im Folgenden stets annehmen, dass der Winkel QPR ein rechter und daher

$$\frac{r}{p} = -\frac{q}{s}$$

sei.

§ 11. Wir wollen noch allgemein untersuchen, welche Folgerungen sich aus der vorstehenden Forderung, dass alle Parallelkreise die Meridiane senkrecht schneiden sollen, ergeben. Dazu führen wir wieder den Winkel φ ein, setzen also $r = p \operatorname{tang}\varphi$ und daher $s = -q \operatorname{cotg}\varphi$. Durch Einsetzung dieser Werthe von r und s nehmen die Ausdrücke, die exacte Differentiale werden sollen, folgende Gestalt an:

$$dx = p\,du + q\,dt,\quad dy = p \operatorname{tang}\varphi\, du - q \operatorname{cotg}\varphi\, dt.$$

§ 12. Um diese Formeln gleichförmiger zu gestalten, wollen wir an Stelle von p und q zwei andere Variable m und n einführen, indem wir setzen:

$$p = m \cos\varphi\,, \quad q = n \sin\varphi\,,$$

woraus

$$r = m \sin\varphi\,, \quad s = - n \cos\varphi$$

folgt. Dadurch werden die Ausdrücke, [**113**] die exacte Differentiale werden sollen:

$$dx = m \cos\varphi\, du + n \sin\varphi\, dt\,,$$
$$dy = m \sin\varphi\, du - n \cos\varphi\, dt\,.$$

Hiermit ist die ganze Aufgabe auf die Frage zurückgeführt: wie müssen die Functionen m und n beschaffen sein, damit die vorstehenden beiden Ausdrücke exacte Differentiale werden? Dabei hat man noch die Bedingungen zu berücksichtigen, deren Erfüllung man nach den obigen Erörterungen in jedem Falle verlangen kann.

Erste Annahme.

Alle Meridiane sollen auf der Axe EF senkrecht stehen und alle Parallelkreise dieser Axe parallel sein.

§ 13. Da $\operatorname{tang}\varphi = \frac{r}{p}$ war, so misst der Winkel φ die Neigung des Bogenelements PQ gegen die Axe EF; andererseits ist die Richtung von PQ die des Meridians. Der Winkel φ muss daher bei Zugrundelegung unserer Voraussetzung ein rechter sein, und die obigen Differentialausdrücke werden:

$$dx = n\, dt\,, \quad dy = m\, du\,.$$

Dass diese exacte Differentiale werden, kann man auf unendlich viele Arten erreichen; man braucht ja nur für m eine beliebige Function von u und für n eine Function von t zu setzen. Daraus folgt, dass man der Abbildung noch weitere Bedingungen auferlegen kann.

§ 14. Zunächst kann man alle Längengrade gleich gross machen; denn es ist ja kein Grund dafür vorhanden, zwischen diesen Graden Ungleichheiten anzunehmen. Wenn daher

unsere Axe EF den Aequator darstellt und die Abscisse EX dabei dem Bogen $al = t$ des Aequators entspricht, so kann man $x = t$, d. h. die obige Function n der Einheit oder auch einer beliebigen andern constanten Grösse gleich setzen, während man für die Ordinate noch eine willkürliche Function von u nehmen kann.

§ 15. Bei dieser Annahme wird das Parallelogramm $PQSR$ nicht nur ein Rechteck, wie auf der Kugel, sondern der Punkt Q liegt auch auf der Ordinate XP, so dast $PQ = dy$, $PR = dx = ds$ wird (Fig. 3). Würden wir ausserdem $y = u$ setzen, wo u die Breite bezeichnet, st würde, falls etwa $dx = do$ einem Längengrade, $dy = du$ einem Breitengrade [**114**] entspräche[3]), $dy = dx$ werden, [d. h. es würden alle Längen- und Breitengrade der Karte einander gleich werden]. Eine solche Abbildung aber würde ganz unbrauchbar sein und alle Gebiete der Erde ganz verzerrt wiedergeben.

Fig. 3.

§ 16. Besser wird man die Ordinate y einer Function der Breite u gleich setzen und über diese Function je nach dem Zwecke, dem die Karte dienen soll, passend verfügen. Hier bietet sich nun zunächst die Annahme dar, dass das Parallelogramm $PQSR$ der Ebene dem Parallelogramm $pqsr$ auf der Kugel ähnlich werden soll; denn dann werden wenigstens die kleinsten Theile der Kugelfläche ihren Bildern in der Ebene ähnlich. Es ist dies gerade die Annahme, die man stets bei den *Mercator*'schen Seekarten, so genannt nach ihrem Erfinder[4]), zu Grunde legt, da eine derartige Abbildung den Seefahrern die grössten Vortheile gewährt. Wir wollen diese Art der Abbildung in aller Kürze entwickeln.

I. Ueber Seekarten in *Mercator*'s Projection.

§ 16^{a} [5]). Da hier das Rechteck $PQSR$ dem Rechteck $pqsr$ ähnlich werden soll, in welchem

$$pq = du, \quad pr = dt \cos u$$

ist, so muss

$$dy : dx = du : dt \cos u$$

werden, und mit Rücksicht auf $dx = dt$ folgt hieraus

$$dy = \frac{du}{\cos u};$$

durch Integration endlich ergiebt sich:

$$y = \log \operatorname{tang} (45^\circ + \tfrac{1}{2}u).$$

Der Breite, die auf der Kugel durch den Winkel u gemessen wird, entspricht also bei dieser Abbildung eine Ordinate, die gleich dem natürlichen Logarithmus der Tangente des Winkels $45^\circ + \frac{1}{2}u$ ist. Nach dieser Formel pflegt man eine Tabelle zu berechnen, welche für die einzelnen Breiten u die Werthe des zugehörigen y giebt.

§ 17. Da hier alle Parallelkreise der Karte dem Aequator gleich sind, während sie auf der Kugel immer kleiner und kleiner werden, so müssen die Grade eines jeden Meridians, die auf der Kugel gleich sind, auf der Karte in demselben Verhältniss grösser werden, in dem die Grade der einzelnen Parallelkreise gegenüber denen auf der Kugel vergrössert werden. Somit nehmen auf den Meridianen die Breitengrade mit wachsender Breite beständig zu, und zwar in demselben Verhältniss, in dem der Cosinus der Breite abnimmt. Wenn daher du einem Meridiangrade [115] auf der Kugel entspricht[3]), so hat auf den in Rede stehenden Karten derselbe Grad die Länge $\frac{du}{\cos u}$. Unter der Breite 60° hat z. B. ein Meridiangrad die doppelte Länge wie auf der Kugel; und am Pol wird er sogar unendlich lang. Derartige Karten dürfen daher nie bis zu den Polen reichen.

§ 18. Der grösste Vortheil, den diese Karten den Seefahrern gewähren, besteht darin, dass die loxodromischen Linien, d. h. diejenigen Curven, welche mit allen Meridianen der Kugel denselben Winkel bilden, bei dieser Abbildung in gerade Linien übergehen; denn letztere schneiden alle Meridiane der Karte, die ja einander parallel sind, unter demselben Winkel.

§ 19. Wenn z. B. die Linie ap (Fig. 1, S. 4) diejenige Loxodrome darstellt, die mit allen Meridianen den Winkel ζ bildet, und wenn man ihre Länge ap mit z bezeichnet, so wird

$$du : dz = \cos\zeta : 1,$$

d. h.

$$dz = \frac{du}{\cos\zeta} \text{ und } z = \frac{u}{\cos\zeta}.$$

Nun möge jener Curve ap die Linie EP der Bildebene entsprechen (Fig. 3, S. 12). Dann muss der Winkel EPX ebenfalls $= \zeta$ und daher die Linie EP offenbar eine Gerade sein; ihre Länge ist $\frac{y}{\cos\zeta}$. Kennt man die Grösse der Linie EP, so kann man daraus umgekehrt die wirkliche Länge des Weges, den das Schiff durchlaufen hat, d. h. die Länge der Curve ap, ermitteln, da nach dem oben Gesagten die Proportion

$$ap : EP = u : y$$

besteht und man das Verhältniss $u : y$ als bekannt ansehen kann.

§ 20. Während hiernach die Bilder der loxodromischen Linien in der Ebene einfach gerade Linien sind, werden andererseits die grössten Kugelkreise durch höhere transcendente Curven dargestellt. Ist nämlich ap (Fig. 1, S. 4) ein Bogen eines grössten Kugelkreises, und bildet derselbe in a mit dem Aequator den Winkel $lap = \vartheta$, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tang} u = \operatorname{tang} \vartheta \cdot \sin t.$$

Durch diese Gleichung und die beiden vorher aufgestellten

$$x = t, \quad y = \log \operatorname{tang} (45^{\circ} + \tfrac{1}{2}u)$$

ist die Curve EP, welche jenem Bogen ap entspricht, bestimmt.

§ 21. Um die Eigenschaften der in Rede stehenden Curve zu ermitteln, bezeichnen wir mit e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems; [116] dann ist

$$e^{y} = \operatorname{tang} (45^{\circ} + \tfrac{1}{2}u) = \frac{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2}u}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}u},$$

folglich

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}u = \frac{e^{y} - 1}{e^{y} + 1}$$

und weiter

$$\operatorname{tang} u = \frac{e^{2y} - 1}{2e^{y}}.$$

Setzt man diesen Werth von tang u in die obige Gleichung ein und beachtet, dass $t = x$ ist, so ergiebt sich:

$$\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang}\,\vartheta \cdot \sin x,$$

und das ist die Gleichung der gesuchten Curve. Aus derselben folgt, dass, wenn x sehr klein ist, auch y sehr klein wird. Für sehr kleine Werthe von y, resp. x kann aber

$$e^y = 1 + y, \quad e^{2y} = 1 + 2y, \quad \sin x = x$$

gesetzt werden; für solche wird daher

$$\frac{y}{1 + y} = x\,\text{tang}\,\vartheta$$

oder [wenn man y^2 gegen y vernachlässigt]

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\vartheta.$$

Die Curve ist daher in E ebenfalls unter dem Winkel ϑ gegen den Aequator geneigt[6]).

Setzt man ferner $x = 90^\circ$, so wird

$$\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} = \text{tang}\,\vartheta,$$

daher

$$e^y = \text{tang}\,\vartheta + \sqrt{\text{tang}^2\,\vartheta + 1} = \frac{\sin\vartheta + 1}{\cos\vartheta} = \sqrt{\frac{1 + \sin\vartheta}{1 - \sin\vartheta}}$$
$$= \text{cotg}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\vartheta)$$

und

$$y = \log\,\text{cotg}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}\vartheta) = \log\,\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\vartheta).$$

Hieraus erkennt man, dass die Curve zu den höheren transcendenten Curven gehört.

II. Ueber Karten, welche jede Fläche in ihrer wahren Grösse darstellen.

§ 22. Es mögen wieder, wie wir schon oben angenommen haben, alle Meridiane durch parallele Gerade dargestellt werden und alle Grade des Aequators einander gleich sein: die auf irgend einem Parallelkreis gezählten Längengrade haben dann

dieselbe Grösse wie auf dem Aequator; es ist also wieder $x = t$. Nun handelt es sich weiter darum, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $PQSR = dxdy$ dem Inhalt des Rechtecks $pqsr$ der Kugel gleich, d. h. $= dudt \cdot \cos u$ werde: dazu ist nur nöthig, dass

$$dy = du \cos u$$

wird, woraus durch Integration

$$y = \sin u$$

folgt. Hiernach ist die Construction einer solchen Karte sehr leicht; man braucht nur die einzelnen Ordinaten gleich [**117**] den Sinus der entsprechenden Breiten zu machen. Die auf den einzelnen Meridianen abzutragenden Breitengrade werden dabei immer kleiner, je weiter man sich vom Aequator entfernt, und verschwinden am Pole ganz. Der Pol selbst wird durch eine dem Aequator parallele Gerade dargestellt, die vom Aequator den Abstand $\sin u = 1$ hat; letzterer Abstand ist also gleich dem Kugelradius.

§ 23. Stellt man die ganze Erdoberfläche auf diese Art dar, so hat die Karte die Form eines Rechtecks, dessen Länge gleich dem Umfang des Aequators, d. h. $= 2\pi$, ist, während die Breitenausdehnung auf jeder Seite des Aequators gleich der Längeneinheit und daher der Flächeninhalt des Rechtecks $= 4\pi$, d. h. gleich dem Inhalt der ganzen Kugelfläche, ist. Auf derartigen Karten werden alle Länder der Erde in ihrer wahren Grösse dargestellt, wenn auch ihre Gestalt grosse Abweichungen von der Wirklichkeit zeigt. Stets hat bei dieser Darstellung irgend ein Theil der Karte denselben Flächeninhalt wie der betreffende Theil der Erdoberfläche. Solche Karten werden daher dazu dienen, die verschiedenen Gebiete der Erde ihrer wahren Grösse nach zu vergleichen. Es geschieht dies am besten durch Angabe der Quadratgrade [des Aequators] oder der Quadratmeilen, wobei auf einen Grad des Aequators fünfzehn deutsche Meilen gerechnet werden.

Zweite Annahme.

Es sollen die kleinsten Theile der Erdoberfläche durch ähnliche Figuren auf der Karte dargestellt werden.

§ 24. Falls eine solche Aehnlichkeit statthaben soll, ist vor Allem nöthig, dass die Meridiane überall auf den Parallelkreisen senkrecht stehen. Nach § 12 müssen daher die folgenden Ausdrücke exacte Differentiale werden:

$$dx = m \cos\varphi\, du + n \sin\varphi\, dt,$$
$$dy = m \sin\varphi\, du - n \cos\varphi\, dt.$$

Ferner ist (s. Fig. 2, S. 4)

$$PQ = du\sqrt{p^2 + r^2} = m\, du,$$
$$PR = dt\sqrt{q^2 + s^2} = n\, dt,$$

während der Winkel QPR bei Zugrundelegung vorstehender Formeln von selbst ein rechter ist.

[**118**] § 25. Soll nun das Rechteck $PQSR$ dem Rechteck $pqsr$ (s. Fig. 1 u. 2, S. 4) ähnlich sein, so ist noch erforderlich, dass

$$PQ : PR = pq : pr,$$

d. h.

$$m : n = 1 : \cos u$$

oder

$$n = m \cos u$$

ist. Unsere beiden Differentialausdrücke werden daher:

$$dx = m \cos\varphi\, du + m \cos u \sin\varphi\, dt,$$
$$dy = m \sin\varphi\, du - m \cos u \cos\varphi\, dt.$$

§ 26. Unsere ganze Aufgabe ist hiermit darauf zurückgeführt, zu ermitteln, welche Functionen von t und u man für m und φ nehmen muss, damit die vorstehenden Ausdrücke exacte Differentiale werden. Doch wollen wir der Kürze halber an Stelle von m und φ wieder p und r einführen. In § 12 war

$$p = m \cos\varphi, \quad r = m \sin\varphi$$

gesetzt; somit haben wir [an Stelle der beiden letzten Gleichungen des § 25] folgende Gleichungen:

$$dx = p\,du + r\cos u\,dt,$$
$$dy = r\,du - p\cos u\,dt;$$

und es fragt sich, welche Functionen von t und u man für p und r nehmen muss, damit die vorstehenden Ausdrücke exacte Differentiale werden. Eine Lösung dieser Aufgabe hat man, wie sich leicht übersehen lässt, in dem Falle der Seekarten; man hat, um die für letztere oben gefundenen Formeln zu erhalten, nur

$$p = 0, \quad r = \frac{1}{\cos u}$$

zu setzen. Andere Lösungen aber lassen sich nicht so einfach errathen.

§ 27. Aus den bekannten Integrabilitätsbedingungen ergiebt sich zunächst, dass folgende Gleichungen erfüllt werden müssen:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{d(r\cos u)}{du}\right) = -r\sin u + \cos u\left(\frac{dr}{du}\right),$$
$$\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\left(\frac{d(p\cos u)}{du}\right) = p\sin u - \cos u\left(\frac{dp}{du}\right).$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt:

$$\left(\frac{dp}{du}\right) = p\,\mathrm{tang}\,u - \frac{1}{\cos u}\left(\frac{dr}{dt}\right),$$

und da

$$dp = \left(\frac{dp}{du}\right)du + \left(\frac{dp}{dt}\right)dt$$

ist, erhält man folgende neue Bedingung:

$$dp = p\,\mathrm{tang}\,u\,du - \left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{du}{\cos u} - r\sin u\,dt + \left(\frac{dr}{du}\right)\cos u\,dt.$$

Multiplicirt man mit $\cos u$ und bringt das erste Glied rechts auf die linke Seite, so wird

$$dp\cdot\cos u - p\sin u\,du$$
$$= -r\sin u\cos u\,dt + \left(\frac{dr}{du}\right)\cos^2 u\,dt - \left(\frac{dr}{dt}\right)du.$$

Da in dieser Gleichung der links stehende Ausdruck ein exactes Differential ist, so muss man auch [119] den rechts stehenden Ausdruck dadurch zu einem solchen machen, dass man für r eine geeignete Function von t und u sucht[7]).

§ 28. Jetzt gilt es nun, einen passenden Weg zur Lösung dieser Aufgabe einzuschlagen. Nach reiflicher Erwägung aller Schwierigkeiten boten sich mir zwei Methoden dar, um zum Ziele zu gelangen. Die eine von ihnen liefert unzählig viele Particularlösungen, während die zweite mich auf die allgemeinste Lösung geführt hat. Beide Methoden werde ich hier ausführlich entwickeln, da durch dieselben die Theorie der Functionen von zwei Veränderlichen eine erhebliche Bereicherung zu erfahren scheint.

Methode zur Auffindung von Particularlösungen[8]) der Differentialgleichungen $dx = p\,du + r\cos u\,dt, \quad dy = r\,du - p\cos u\,dt.$

§ 29. Da die Functionen p und r die beiden Variabeln u und t enthalten, wollen wir jede von ihnen gleich dem Producte einer Function von u und einer Function von t setzen. Es sei also

$$p = U \cdot T, \quad r = V \cdot \Theta,$$

wo U und V Functionen von u allein, T und Θ aber Functionen von t allein sind. Dann nehmen die Ausdrücke, die exacte Differentiale werden sollen, die Form an:

$$\text{I.} \quad dx = UT\,du + V\Theta\cos u\,dt,$$
$$\text{II.} \quad dy = V\Theta\,du - UT\cos u\,dt.$$

§ 30. Hieraus kann man eine doppelte Darstellung von x und y in Form von Integralen ableiten. Wenn nämlich t als constant angesehen wird und daher die letzten Glieder verschwinden, schliesst man aus den ersten:

$$x = T\int U\,du, \quad y = \Theta\int V\,du.$$

Betrachtet man dagegen u als constant, so ergiebt sich aus den letzten Gliedern:

$$x = V\cos u\int \Theta\,dt, \quad y = -U\cos u\int T\,dt.$$

[120] Ferner müssen die beiden Ausdrücke für x einander gleich sein, ebenso die für y. Das giebt:

$$T\int U\,du = V\cos u\int \Theta\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{\int U\,du}{V\cos u} = \frac{\int \Theta\,dt}{T}$$

und

$$\Theta\int V\,du = -U\cos u\int T\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{\int V\,du}{U\cos u} = -\frac{\int T\,dt}{\Theta}.$$

Aus diesen beiden Bedingungen muss man die Functionen U, V, T und Θ ermitteln.

§ 31. Soll

$$\frac{\int U\,du}{V\cos u} = \frac{\int \Theta\,dt}{T}$$

sein, so müssen beide Brüche einer Constanten gleich sein, da ja die beiden Variabeln u und t von einander unabhängig sind. Der Werth dieser Constanten sei α; dann ist

$$\int U\,du = \alpha V\cos u \text{ und } \int \Theta\,dt = \alpha T.$$

Ebenso muss, wenn

$$\frac{\int V\,du}{U\cos u} = -\frac{\int T\,dt}{\Theta}$$

sein soll, jeder dieser Brüche einer Constanten β gleich sein, d. h.

$$\int V\,du = \beta U\cos u, \quad \int T\,dt = -\beta\Theta.$$

Dadurch sind die in den Formeln auftretenden Integrale auf absolute Grössen reducirt, und die Werthe von x und y lassen sich ohne Integrationszeichen folgendermaassen ausdrücken:

$$x = \alpha TV\cos u, \quad y = \beta\Theta U\cos u.$$

§ 32. Weiter wollen wir zur Abkürzung

$$U\cos u = P, \quad V\cos u = Q, \quad \text{also} \quad U = \frac{P}{\cos u}, \quad V = \frac{Q}{\cos u}$$

setzen. Unsere vier Formeln werden dann:

$$\int \Theta\,dt = \alpha T, \quad \int T\,dt = -\beta\Theta;$$

$$\int \frac{P\,du}{\cos u} = \alpha Q, \quad \int \frac{Q\,du}{\cos u} = \beta P.$$

Differentiirt man die ersten Gleichungen beider Reihen, so ergiebt sich:

$$\Theta = \alpha \frac{dT}{dt}, \quad P = \alpha \cos u \frac{dQ}{du},$$

und substituirt man diese Ausdrücke in den beiden übrigen Gleichungen, so werden diese:

$$\int T\,dt = -\alpha\beta \frac{dT}{dt} \text{ und } \int \frac{Q\,du}{\cos u} = \alpha\beta \cos u \frac{dQ}{du}.$$

[121] § 33 [5]). Differentiirt man die beiden letzten Gleichungen nochmals nach t, resp. u, so ergeben sich die folgenden:

$$T = -\alpha\beta \frac{d^2T}{dt^2}, \quad Q = \alpha\beta \cos^2 u \frac{d^2Q}{du^2} - \alpha\beta \sin u \cos u \frac{dQ}{du}.$$

Damit sind wir auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelangt, und von ihrer Integration hängt die Lösung unserer Aufgabe ab.

§ 34. Wir wollen mit der ersten Gleichung

$$T = -\alpha\beta \frac{d^2T}{dt^2}$$

beginnen. Multipliciren wir dieselbe mit $2\frac{dT}{dt}$ und integriren, so ergiebt sich:

$$T^2 = -\alpha\beta \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + A$$

und weiter

$$dt^2 = \frac{\alpha\beta\,dT^2}{A - T^2}.$$

Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung

$$Q = \alpha\beta \cos^2 u \frac{d^2Q}{du^2} - \alpha\beta \sin u \cos u \frac{dQ}{du},$$

wenn man dieselbe mit $2\frac{dQ}{du}$ multiplicirt und dann integrirt:

$$Q^2 = \alpha\beta \cos^2 u \left(\frac{dQ}{du}\right)^2 + B$$

und weiter

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} = \frac{\alpha\beta\,dQ^2}{Q^2 - B}.$$

Behufs der weiteren Integration müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Grösse $\alpha\beta$ positiv oder negativ ist.

Erster Fall:

Es sei $\alpha\beta = +\lambda^2$, also $\beta = +\frac{\lambda^2}{\alpha}$.

§ 35. In diesem Falle haben wir

$$dt^2 = \frac{\lambda^2\, dT^2}{A - T^2},$$

und hierin wollen wir, da A eine positive Grösse sein muss, $A = a^2$ setzen. Dann wird

$$dt = \frac{\lambda\, dT}{\sqrt{a^2 - T^2}}$$

und nach Ausführung der Integration

$$t + \delta = \lambda \arcsin\left(\frac{T}{a}\right),$$

woraus durch Umkehrung

$$T = a \sin\left(\frac{t+\delta}{\lambda}\right)$$

folgt. Da ferner

$$\Theta = \alpha\,\frac{dT}{dt}$$

war, so ergiebt sich

$$\Theta = \frac{a\alpha}{\lambda}\cos\left(\frac{t+\delta}{\lambda}\right).$$

§ 36. Die zweite zu integrirende Gleichung wird für $\alpha\beta = +\lambda^2$:

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\lambda\, dQ}{\sqrt{Q^2 - B}};$$

ihr Integral ist

$$\log \operatorname{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) + \lambda \log \varepsilon = \lambda \log\left(Q + \sqrt{Q^2 - B}\right).$$

Um diese Gleichung in eine bequemere Form bringen zu können, wollen wir

$$\operatorname{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) = s$$

setzen, woraus, da

$$\log s = \int \frac{du}{\cos u}$$

ist,

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u}$$

[122] und daher

$$\frac{ds}{du} = \frac{s}{\cos u}$$

folgt. Die vorstehende Gleichung wird dann:

$$\log(\varepsilon^\lambda s) = \lambda \log\left(Q + \sqrt{Q^2 - B}\right),$$

woraus

$$\varepsilon^\lambda s = \left(Q + \sqrt{Q^2 - B}\right)^\lambda \text{ oder } Q + \sqrt{Q^2 - B} = \varepsilon s^{\frac{1}{\lambda}}$$

folgt. Setzen wir noch zur Abkürzung $\frac{1}{\lambda} = \nu$ und lösen nach Q auf, so ergiebt sich:

$$Q = \tfrac{1}{2}\varepsilon s^\nu + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon}.$$

Ferner wird

$$\frac{dQ}{ds} = \tfrac{1}{2}\nu\varepsilon s^{\nu-1} - \frac{\nu B}{2\varepsilon} s^{-(\nu+1)},$$

$$\frac{dQ}{du} = \frac{dQ}{ds}\,\frac{s}{\cos u} = \frac{\frac{1}{2}\nu\varepsilon s^\nu}{\cos u} - \frac{\nu B}{2\varepsilon}\,\frac{s^{-\nu}}{\cos u},$$

$$P = \alpha \cos u \frac{dQ}{du} = \tfrac{1}{2}\alpha\nu\varepsilon s^\nu - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon}.$$

§ 37. Aus den oben gefundenen Werthen von P und Q folgt

$$U = \frac{\alpha\nu\varepsilon s^\nu}{2\cos u} - \frac{\alpha\nu B s^{-\nu}}{2\varepsilon\cos u}, \quad V = \frac{\varepsilon s^\nu}{2\cos u} + \frac{B s^{-\nu}}{2\varepsilon\cos u};$$

und hieraus endlich ergeben sich für die Coordinaten x, y die Formeln:

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha a \sin\left(\frac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu + \frac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\nu\lambda a \cos\left(\frac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(\varepsilon s^\nu - \frac{B}{\varepsilon} s^{-\nu}\right),$$

und darin ist

$$\nu = \frac{1}{\lambda}, \quad s = \text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}u).$$

Die vorstehenden Formeln werden noch eleganter, wenn wir $B = \varepsilon^2 b$ setzen. Dann lauten dieselben:

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \sin\left(\frac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} + b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right),$$

$$y = \tfrac{1}{2}\alpha\varepsilon a \cos\left(\frac{t+\delta}{\lambda}\right)\left(s^{\frac{1}{\lambda}} - b s^{-\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Zweiter Fall:

Es sei $\alpha\beta = -\mu^2$, also $\beta = -\frac{\mu^2}{\alpha}$.

§ 38. In diesem Falle haben wir

$$dt^2 = \frac{-\mu^2 dT^2}{A - T^2}$$

und daher [123]

$$dt = \frac{\mu dT}{\sqrt{T^2 - A}}.$$

Durch Integration ergiebt sich

$$t + \delta = \mu \log\left(T + \sqrt{T^2 - A}\right)$$

oder, falls e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet,

$$e^{\frac{t+\delta}{\mu}} = T + \sqrt{T^2 - A}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{t+\delta}{\mu} = \vartheta,$$

womit zugleich $\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{\mu}$ wird, so ist

$$e^{\vartheta} - T = \sqrt{T^2 - A},$$

daher

$$T = \frac{e^{2\vartheta} + A}{2e^{\vartheta}} = \tfrac{1}{2}e^{\vartheta} + \tfrac{1}{2}Ae^{-\vartheta}.$$

Ferner wird

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\mu}\frac{dT}{d\vartheta} = \frac{1}{2\mu}\left(e^{\vartheta} - Ae^{-\vartheta}\right),$$

somit

$$\Theta = \frac{\alpha}{2\mu}\left(e^{\vartheta} - Ae^{-\vartheta}\right).$$

§ 39. Weiter wird in diesem Falle

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} = \frac{-\mu^2 dQ^2}{Q^2 - B} = \frac{\mu^2 dQ^2}{B - Q^2}.$$

Hierin setzen wir, da B nothwendig positiv sein muss, $B = b^2$, so dass

$$\frac{du}{\cos u} = \frac{\mu dQ}{\sqrt{b^2 - Q^2}}$$

wird. Die Integration ergiebt:

$$\log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}u\right) + \log \varepsilon = \mu \cdot \arcsin\left(\frac{Q}{b}\right),$$

d. h., wenn man wieder $\log \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}u) = s$ setzt,

$$\frac{\log(\varepsilon s)}{\mu} = \arcsin\left(\frac{Q}{b}\right),$$

daher umgekehrt

$$Q = b \sin\left(\frac{\log(\varepsilon s)}{\mu}\right).$$

Weiter wird

$$\frac{dQ}{ds} = \frac{b}{\mu}\frac{1}{s}\cos\left(\frac{\log(\varepsilon s)}{\mu}\right)$$

und

$$\frac{dQ}{du} = \frac{dQ}{ds}\frac{s}{\cos u} = \frac{b}{\mu \cos u}\cos\left(\frac{\log(\varepsilon s)}{\mu}\right),$$

endlich

$$P = \frac{\alpha b}{\mu}\cos\left(\frac{\log(\varepsilon s)}{\mu}\right).$$

§ 40. Nun war [nach § 31, resp. § 32]

$$x = \alpha T V \cos u = \alpha T Q, \qquad y = \beta \Theta P = -\frac{\mu^2}{\alpha}\Theta P,$$

also wird:

$$x = \frac{1}{2}\alpha b \sin\left(\frac{\log(\varepsilon s)}{\mu}\right)(e^{\vartheta} + Ae^{-\vartheta}),$$

$$y = -\frac{1}{2}\alpha b \cos\left(\frac{\log(\varepsilon s)}{\mu}\right)(e^{\vartheta} - Ae^{-\vartheta});$$

und darin ist

$$\vartheta = \frac{t+\delta}{\mu}; \quad s = \operatorname{tang}(45^{0} + \tfrac{1}{2}u).$$

[124] § 41. Da in den vorstehenden Formeln einige Grössen völlig willkürlich sind, so haben wir in ihnen schon eine ziemlich allgemeine Lösung unseres Problems, eine Lösung, die unzählig viele Specialfälle umfasst. Eine noch allgemeinere erhalten wir aber, wenn wir zwei oder auch beliebig viele Lösungen der obigen Form mit einander verbinden. Hat man nämlich zuerst die Werthe $x = M$, $y = N$ gefunden, sodann $x = M'$, $y = N'$, weiter $x = M''$, $y = N''$ etc., so kann man aus ihnen folgende viel allgemeinere Lösung bilden:

$$x = \mathfrak{A}M + \mathfrak{B}M' + \mathfrak{C}M'' + \mathfrak{D}M''' + \cdots,$$
$$y = \mathfrak{A}N + \mathfrak{B}N' + \mathfrak{C}N'' + \mathfrak{D}N''' + \cdots;$$

und zwar ist diese Lösung sicher so allgemein, dass alle möglichen Lösungen in ihr enthalten sind[9]).

Methode zur Ermittelung der allgemeinen Lösung[8]) der Differentialgleichungen

$$dx = p\,du + r\cos u\,dt, \quad dy = r\,du - p\cos u\,dt.$$

§ 42. Wir wollen eine solche Combination der beiden vorstehenden Gleichungen suchen, die eine Zerlegung der rechten Seite in zwei Factoren gestattet. Zu dem Zwecke multipliciren wir die erste mit α, die zweite mit β und addiren, so kommt:

$$\alpha dx + \beta dy = p(\alpha du - \beta\cos u\,dt) + r(\beta du + \alpha\cos u\,dt),$$

eine Gleichung, die wir, um die beiden Differentialfactoren rechts auf eine gleiche Form zu bringen, auch so schreiben können:

$$\alpha dx + \beta dy = \alpha p\left(du - \frac{\beta}{\alpha}\cos u\,dt\right) + \beta r\left(du + \frac{\alpha}{\beta}\cos u\,dt\right).$$

Wenn nun

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}, \text{ also } \alpha^2 + \beta^2 = 0 \text{ oder } \beta = \alpha\sqrt{-1}$$

ist, so ergiebt unsere Combination:

$$dx + dy\sqrt{-1} = (p + r\sqrt{-1})(du - \sqrt{-1}\cos u\, dt).$$

Damit der Differentialfactor rechts ein exactes Differential wird, schreiben wir die letzte Gleichung so:

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u\,(p + r\sqrt{-1})\left(\frac{du}{\cos u} - dt\sqrt{-1}\right).$$

[125] § 43. Setzen wir jetzt

$$\frac{du}{\cos u} - dt\sqrt{-1} = dz,$$

also

$$z = \log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{-1},$$

so wird

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u\,(p + r\sqrt{-1})\,dz;$$

und die rechte Seite dieser Gleichung ist offenbar nur dann ein exactes Differential, wenn der endliche Factor $\cos u\,(p + r\sqrt{-1})$ eine Function von z ist; welcher Function von z er aber auch immer gleich sei, stets kann man die Integration ausgeführt denken. Hieraus folgt, dass auch das Integral eine Function von z ist, so dass der Ausdruck $x + y\sqrt{-1}$ gleich einer beliebigen Function von z, d. h. von der Grösse

$$\log \operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) - t\sqrt{-1}$$

wird.

§ 44. Die Formel wird eleganter, wenn wir, wie oben,

$$\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}u) = s$$

setzen, so dass

$$\frac{ds}{s} = \frac{du}{\cos u} \text{ und } z = \log s - t\sqrt{-1}$$

wird. Bezeichnet, wie üblich, Γ eine beliebige Function des in Klammern beigesetzten Arguments, so wird also

$$x + y\sqrt{-1} = \Gamma(\log s - t\sqrt{-1})$$

oder auch, was auf dasselbe hinauskommt,

$$x + y\sqrt{-1} = 2\Gamma\left(\log s - t\sqrt{-1}\right).$$

Da nun der Ausdruck $\sqrt{-1}$ seiner Natur nach das doppelte Vorzeichen $\pm$ haben kann, so wird auch

$$x - y\sqrt{-1} = 2\Gamma\left(\log s + t\sqrt{-1}\right);$$

und aus beiden Gleichungen folgt:

$$x = \Gamma\left(\log s - t\sqrt{-1}\right) + \Gamma\left(\log s + t\sqrt{-1}\right),$$
$$y\sqrt{-1} = \Gamma\left(\log s - t\sqrt{-1}\right) - \Gamma\left(\log s + t\sqrt{-1}\right).$$

Bekanntlich ergeben diese Ausdrücke für x und y stets reelle Werthe [10]).

§ 45. Es möge z. B. Γ irgend eine Potenz des beigesetzten Arguments oder auch ein Vielfaches einer solchen Potenz bezeichnen, und es sei λ der Potenzexponent, so ergiebt sich, wenn man entwickelt und zur Abkürzung $\log s = v$ setzt:

$$[126] \quad x = v^{\lambda} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1\cdot 2} v^{\lambda-2} t^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} v^{\lambda-4} t^4 - \frac{\lambda\cdots(\lambda-5)}{1\cdot 2\cdots 6} v^{\lambda-6} t^6 + \cdots,$$

$$y = \lambda v^{\lambda-1} t - \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1\cdot 2\cdot 3} v^{\lambda-3} t^3 + \frac{\lambda\cdots(\lambda-4)}{1\cdot 2\cdots 5} v^{\lambda-5} t^5 - \frac{\lambda\cdots(\lambda-6)}{1\cdot 2\cdots 7} v^{\lambda-7} t^7 + \cdots.$$

Eigentlich hätte der Werth von y das entgegengesetzte Zeichen erhalten müssen; aber man kann, wie sich aus der Natur der Sache ergiebt, auf den beiden Coordinatenaxen x und y die positive und negative Richtung ohne Weiteres vertauschen [11]).

§ 46. Scheinbar sind diese Werthe ganz verschieden von denen, welche uns die vorhergehende particuläre Lösung geliefert hat. Andererseits aber ergeben sich [aus den Formeln des § 45] sofort die für Seekarten gültigen, die in den oben abgeleiteten Formeln [§ 37, 40] nicht enthalten waren. Man braucht nur $\lambda = 1$ zu setzen, so wird

$$x = \log s = \log\operatorname{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}u), \quad y = t.$$

Dass oben die Werthe von x und y mit einander vertauscht waren, macht nichts aus; denn eine Vertauschung der Coordinatenaxen x und y ist stets gestattet.

§ 47. Indessen ist es sicher, dass alle oben gefundenen Werthe auch in unseren jetzigen Formeln enthalten sein müssen, weil letztere offenbar die allgemeinste Lösung darstellen; und es ist wohl der Mühe werth, zu zeigen, dass dies wirklich der Fall ist. Dazu beachte man, dass, wenn $\Gamma(z)$ eine beliebige Function von z bezeichnet, dafür auch gesetzt werden kann $\Delta(Z)$, wo Z seinerseits irgend eine Function von z ist. Nehmen wir nun $Z = e^{\alpha z}$, während $z = \log s - t\sqrt{-1}$ ist, so kann man statt $\Gamma(\log s - t\sqrt{-1})$ auch schreiben $\Delta\left(e^{\alpha \log s - t\sqrt{-1}}\right)$. Es ist aber

$$e^{\alpha \log s} = s^\alpha,$$

ferner

$$e^{\alpha t\sqrt{-1}} = \cos(\alpha t) \pm \sqrt{-1}\sin(\alpha t),$$

daher

$$e^{\alpha \log s - t\sqrt{-1}} = s^\alpha\left[\cos(\alpha t) - \sqrt{-1}\sin(\alpha t)\right].$$

Setzen wir demnach $\Delta(Z)$ an Stelle von $\Gamma(z)$, so gehen die Formeln des § 44 in folgende über:

$$x = \Delta\left[s^\alpha(\cos(\alpha t) - \sqrt{-1}\sin(\alpha t))\right] + \Delta\left[s^\alpha(\cos(\alpha t) + \sqrt{-1}\sin(\alpha t))\right],$$

$$y\sqrt{-1} = \Delta\left[s^\alpha(\cos(\alpha t) - \sqrt{-1}\sin(\alpha t))\right] - \Delta\left[s^\alpha(\cos(\alpha t) + \sqrt{-1}\sin(\alpha t))\right];$$

und dabei ist zu beachten, dass diese beiden Werthe nicht nur mit einer beliebigen Constanten multiplicirt, sondern auch mit einander vertauscht werden können.

[127] § 48. Betrachten wir speciell den Fall $\Delta(Z) = Z$, so wird

$$x = 2s^\alpha\cos(\alpha t), \quad y = 2s^\alpha\sin(\alpha t).$$

An Stelle von α [das ja beliebig ist] können wir auch $-\alpha$ setzen und erhalten so eine zweite Lösung, nämlich

$$x = 2s^{-\alpha}\cos(\alpha t), \quad y = -2s^{-\alpha}\sin(\alpha t).$$

Nun ist schon oben bemerkt, dass man zwei Lösungen stets derart combiniren kann, dass man beide mit Constanten mul-

tiplicirt und dann addirt. Demnach kann aus den beiden vorstehenden Lösungen die allgemeinere gebildet werden:

$$x = (\mathfrak{A}s^{\alpha} + \mathfrak{B}s^{-\alpha})\cos(\alpha t), \quad y = (\mathfrak{A}s^{\alpha} - \mathfrak{B}s^{-\alpha})\sin(\alpha t).$$

Diese Formeln stimmen mit den in § 37 gefundenen überein. Augenscheinlich sind aber die Formeln, welche die Function $\varDelta$ enthalten, viel allgemeiner.

§ 49. Um aus unseren allgemeinen Formeln auch die zweite particuläre Lösung [§ 40] abzuleiten, setzen wir

$$Z = \cos(\alpha z) = \cos\left[\alpha \log s - \alpha t\sqrt{-1}\right]$$
$$= \cos(\alpha \log s)\cos\left(\alpha t\sqrt{-1}\right) + \sin(\alpha \log s)\sin\left(\alpha t\sqrt{-1}\right).$$

Bekanntlich ist aber

$$\cos\left(\alpha t\sqrt{-1}\right) = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}$$

und

$$\sin\left(\alpha t\sqrt{-1}\right) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}},$$

daher

$$Z = \frac{e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}}{2}\cos(\alpha \log s) + \frac{e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t}}{2\sqrt{-1}}\sin(\alpha \log s).$$

Wir haben somit:

$$x = \varDelta\left\{\frac{\cos(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{\sin(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right\}$$
$$+ \varDelta\left\{\frac{\cos(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} - \frac{\sin(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right\},$$

$$y\sqrt{-1} = \varDelta\left\{\frac{\cos(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} + \frac{\sin(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right\}$$
$$- \varDelta\left\{\frac{\cos(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t})}{2} - \frac{\sin(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t})}{2\sqrt{-1}}\right\}.$$

[128] Nehmen wir nun wieder $\varDelta(Z) = Z$, so wird

$$x = \cos(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} + e^{+\alpha t}), \quad y\sqrt{-1} = \frac{\sin(\alpha \log s)(e^{-\alpha t} - e^{+\alpha t})}{\sqrt{-1}},$$

und falls wir α negativ nehmen,

$$x = \cos(\alpha \log s)(e^{+\alpha t} + e^{-\alpha t}),\quad y\sqrt{-1} = \frac{-\sin(\alpha \log s)(e^{+\alpha t} - e^{-\alpha t})}{\sqrt{-1}}.$$

Diese Formeln enthalten die in § 40 aufgestellte Lösung des zweiten Falles[12]).

§ 50. In den vorstehenden allgemeinsten Formeln, die für x und y gefunden sind (§ 44), sind alle möglichen Abbildungen enthalten, bei denen die Kugelfläche derart in einer Ebene dargestellt wird, dass die Meridiane und Parallelkreise einander senkrecht schneiden und zugleich alle ganz kleinen, auf der Kugel beliebig angenommenen Figuren durch ähnliche Figuren in der Ebene wiedergegeben werden[13]).

§ 51. In dieser allgemeinsten Lösung ist auch die Projection enthalten, mittels deren man gewöhnlich die [nördliche und südliche] Erdhalbkugel im Innern von Kreisen abzubilden pflegt, in deren Centren die beiden Pole liegen. Diese Projection ergiebt sich aus den in § 48 aufgestellten Formeln

$$x = s^{\alpha} \cos(\alpha t),\quad y = s^{\alpha} \sin(\alpha t),$$

wenn wir in denselben $\alpha = -1$ annehmen, so dass

$$x = \frac{\cos t}{\operatorname{tang}(45^{\circ} + \frac{1}{2}u)},\quad y = \frac{\sin t}{\operatorname{tang}(45^{\circ} + \frac{1}{2}u)}$$

wird. Dann verschwinden nämlich x und y in den Polen, in denen ja $u = 90^{\circ}$ ist. Für den Aequator aber, für den $u = 0$ ist, wird $s = 1$, daher

$$x = \cos t,\ y = \sin t \ \text{ und } \ x^2 + y^2 = 1.$$

Es wird also der Aequator durch einen mit dem Radius 1 beschriebenen Kreis dargestellt. Da ferner für alle Punkte, welche dieselbe Länge t haben, $\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t$ ist, so werden die Meridiane durch die Radien der Kreise dargestellt. Endlich ist das Bild des Parallelkreises von der Breite u ein dem Aequator concentrischer Kreis, dessen Radius

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\operatorname{tang}(45^{\circ} + \frac{1}{2}u)} = \operatorname{tang}(45^{\circ} - \tfrac{1}{2}u)$$

ist; d. h. der Radius ist gleich der Tangente des halben Polabstandes. Dieser Bedingung gemäss pflegt man solche Karten der beiden Halbkugeln zu entwerfen[13a]).

[129] Dritte Annahme.

Alle Gebiete der Erde sollen in ihrer wahren Grösse in einer Ebene dargestellt werden.

§ 52. Wir gehen von den allgemeinen Formeln aus (§ 8):

$$dx = p\,du + q\,dt, \quad dy = r\,du + s\,dt$$

und wollen wieder festsetzen, dass die Meridiane von den Parallelkreisen senkrecht geschnitten werden. Es muss daher die Bedingung

$$\frac{s}{q} = -\frac{p}{r}$$

erfüllt werden. Demgemäss setzen wir

$$s = -np, \quad q = +nr,$$

wodurch wir

$$dx = p\,du + nr\,dt, \quad dy = r\,du - np\,dt$$

erhalten. Nun ist das Linienelement des Meridians

$$PQ = du\sqrt{p^2 + r^2}$$

und das des Parallelkreises

$$PR = n\,dt\sqrt{p^2 + r^2}.$$

Daher wird der Flächeninhalt des Rechtecks $PQSR$

$$n\,du\,dt(p^2 + r^2),$$

während auf der Kugel der Inhalt der entsprechenden Fläche $pqsr = du\,dt \cos u$ war. Beide Ausdrücke sollen einander gleich sein; es wird also

$$n(p^2 + r^2) = \cos u \text{ und daher } n = \frac{\cos u}{p^2 + r^2}.$$

Unsere Annahme führt somit auf folgende Formeln:

$$dx = p\,du + \frac{r\,dt \cos u}{p^2 + r^2}, \quad dy = r\,du - \frac{p\,dt \cos u}{p^2 + r^2}.$$

Die weitere Aufgabe besteht darin, solche Functionen für p und r zu suchen, dass die beiden vorstehenden Ausdrücke exacte Differentiale werden.

§ 53. Zur Erleichterung der Rechnung setzen wir

$$p = m \cos\varphi, \quad r = m \sin\varphi,$$

so dass

$$p^2 + r^2 = m^2$$

wird. Dann haben wir

$$dx = m\,du \cos\varphi + \frac{1}{m}\,dt \cos u \sin\varphi,$$

$$dy = m\,du \sin\varphi - \frac{1}{m}\,dt \cos u \cos\varphi.$$

Ferner werde

$$m = k \cos u$$

gesetzt, so dass

$$dx = k\,du \cos u \cos\varphi + \frac{1}{k}\,dt \sin\varphi,$$

$$dy = k\,du \cos u \sin\varphi - \frac{1}{k}\,dt \cos\varphi$$

wird. [130] Endlich wollen wir

$$du \cos u = dv, \quad \text{d. h. } v = \sin u$$

setzen, so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$dx = k\,dv \cos\varphi + \frac{1}{k}\,dt \sin\varphi,$$

$$dy = k\,dv \sin\varphi - \frac{1}{k}\,dt \cos\varphi;$$

und es sind für k und φ geeignete Werthe zu ermitteln.

§ 54. Da bisher keine Methode bekannt ist, durch die man zur allgemeinen Lösung der vorstehenden Gleichungen gelangen kann, wollen wir particuläre Lösungen suchen [14]). Zunächst bietet sich uns die Lösung des oben (§ 22) behandelten Falles dar, in dem $x = t$, $y = \sin u$ war. Diese Werthe ergeben sich aus unseren Formeln, wenn wir in letzteren $k = 1$ und $\varphi = 90^\circ$ setzen. Ferner übersieht man sofort, dass man etwas allgemeiner für k und φ beliebige constante Werthe setzen kann. Ist $k = a$, $\varphi = \alpha$, so wird

$$x = av \cos\alpha + \frac{t \sin\alpha}{a}, \quad y = av \sin\alpha - \frac{t \cos\alpha}{a}.$$

Diese Lösung unterscheidet sich von der vorhergehenden nur dadurch, dass die Meridiane nicht mehr auf unserer Axe EF senkrecht stehen, sondern gegen dieselbe sämmtlich unter dem Winkel α geneigt sind. Die Parallelkreise ferner schneiden alle Meridiane senkrecht und werden daher ebenfalls parallele gerade Linien.

§ 55. Andere Lösungen ergeben sich dadurch, dass wir für eine der Grössen k und φ eine Function nehmen, die nur von v, für die andere eine Function, die nur von t abhängt. Es sei also $k = T$ und $\varphi = V$; dann wird

$$dx = T dv \cos V + \frac{dt}{T} \sin V,$$

$$dy = T dv \sin V - \frac{dt}{T} \cos V.$$

Hieraus folgt:

$$x = T\int dv \cos V = \sin V \int \frac{dt}{T},$$

$$y = T\int dv \sin V = -\cos V \int \frac{dt}{T},$$

und es müssen die beiden Ausdrücke für x einander gleich sein und ebenso die für y.

[131] § 56. Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke für x schliessen wir:

$$\frac{\int dv \cos V}{\sin V} = \frac{1}{T}\int \frac{dt}{T} = \alpha,$$

ferner aus der der beiden Ausdrücke für y:

$$\frac{\int dv \sin V}{\cos V} = -\frac{1}{T}\int \frac{dt}{T} = \beta.$$

Für die Function T haben wir somit die beiden Gleichungen

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T \text{ und } \int \frac{dt}{T} = -\beta T,$$

und daraus ergiebt sich, dass $\beta = -\alpha$ sein muss. Durch Differentiation folgt

$$\frac{dt}{T} = \alpha dT, \text{ daher } T = \sqrt{\frac{2t}{\alpha}}.$$

Für V aber haben wir

$$\int dv \cos V = \alpha \sin V \text{ und } \int dv \sin V = -\alpha \cos V.$$

Differentiirt man, so ergeben beide Gleichungen $dv = \alpha dV$, mithin $V = \frac{v}{\alpha}$ oder allgemeiner

$$V = \frac{v + c}{\alpha}.$$

§ 57. Mittelst dieser Werthe finden wir, da

$$\int dv \cos V = \alpha \sin V = \alpha \sin \frac{v + c}{\alpha}$$

und

$$\int \frac{dt}{T} = \alpha T = \sqrt{2\alpha t}$$

ist, für die Coordinaten folgende Ausdrücke:

$$x = \sqrt{2\alpha t} \sin \frac{v + c}{\alpha}, \quad y = -\sqrt{2\alpha t} \cos \frac{v + c}{\alpha}.$$

Daraus schliessen wir zunächst, dass

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2\alpha t},$$

d. h. alle Orte, welche die gleiche Länge t haben, liegen auf der Karte auf der Peripherie eines Kreises mit dem Radius $\sqrt{2\alpha t}$. Die sämmtlichen Meridiane werden demnach durch concentrische Kreise dargestellt; der Anfangsmeridian, für den $t = 0$ ist, ist dabei sogar in den Mittelpunkt der Kreise zusammengezogen. Hieraus geht hervor, dass alle Parallelkreise durch die Radien der obigen concentrischen Kreise dargestellt werden. Eine derartige Abbildung ist sicher ganz unzweckmässig, wenn sie auch alle vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt.

§ 58. Wir wollen weiter für k eine Function von v setzen, die $= V$ sei, während der Winkel φ eine Function von t sein soll, die $= T$ sei. Dann haben wir:

$$dx = V dv \cos T + \frac{1}{V} dt \sin T,$$

$$dy = V dv \sin T - \frac{1}{V} dt \cos T;$$

[132] woraus sich für x und y die Werthe ergeben:

$$x = \cos T \int V dv = \frac{1}{V} \int dt \sin T,$$

$$y = \sin T \int V dv = -\frac{1}{V} \int dt \cos T.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$V \int V dv = \frac{1}{\cos T} \int dt \sin T = \alpha,$$

$$-V \int V dv = \frac{1}{\sin T} \int dt \cos T = -\beta.$$

Die beiden Ausdrücke für V zeigen, dass $\beta = \alpha$ sein muss. Ferner folgt durch Differentiation

$$V dv = -\frac{\alpha dV}{V^2} \quad \text{oder} \quad dv = -\frac{\alpha dV}{V^3}$$

und durch Integration

$$v + c = \frac{\alpha}{2V^2} \quad \text{oder} \quad V = \sqrt{\frac{\alpha}{2(v+c)}}.$$

Für die Function T haben wir die beiden Gleichungen

$$\int dt \sin T = \alpha \cos T \text{ und} \int dt \cos T = -\alpha \sin T;$$

differentiirt man beide, so erhält man

$$dt = -\alpha dT, \text{ also } T = -\frac{t}{\alpha}.$$

§ 59. Vermöge der eben gefundenen Werthe wird, wenn man noch beachtet, dass

$$\int V dv = \sqrt{2\alpha(v+c)}$$

ist:

$$x = \sqrt{2\alpha(v+c)} \cos\frac{t}{\alpha}, \quad y = -\sqrt{2\alpha(v+c)} \sin\frac{t}{\alpha}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tang}\left(\frac{t}{\alpha}\right), \quad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2\alpha(v+c)}.$$

Die erste dieser Gleichungen ergiebt, dass alle Meridiane durch Gerade dargestellt werden, die von einem festen Punkte wie Strahlen ausgehen. Die zweite Gleichung ferner lehrt, dass alle Parallelkreise in concentrische Kreise der Karte übergehen. Diese Art der Darstellung ist ausserordentlich geeignet, die beiden Erdhalbkugeln im Innern von Kreisen abzubilden, deren Mittelpunkte die Bilder der Pole sind. Dabei wird die Gestalt irgend eines Gebietes nicht erheblich von der Wirklichkeit abweichen, während man die wahre Grösse desselben unmittelbar auf der Karte messen kann[15]).

§ 60. Die obigen drei Annahmen enthalten alle Forderungen, die man an Landkarten oder Seekarten stellen kann. Die zweite jener Annahmen umfasst sogar, wie die vorstehende Untersuchung gelehrt hat, alle möglichen Darstellungen. Doch ist es wegen der grossen Allgemeinheit der sich ergebenden Formeln nicht leicht, aus denselben Methoden abzuleiten, die praktisch brauchbar sind. Auch hat die vorliegende Abhandlung nicht den Zweck, auf praktische Anwendungen genauer einzugehen, zumal die üblichen Projectionen von anderen Autoren bereits hinlänglich behandelt sind.

---

[133] II.

Ueber die Darstellung einer Kugelfläche auf einer Karte.

(De projectione geographica superficiei sphaericae.)

Von

Leonhard Euler.

[Acta Acad. Scient. Imperial. Petropolitanae pro anno MDCCLXXVII, T. I, p. 133—142.]

---

§ 1. In der vorhergehenden Abhandlung habe ich alle möglichen Arten solcher Abbildungen einer Kugelfläche in einer Ebene abgeleitet, bei denen die kleinsten Theile durch ähnliche Figuren wiedergegeben werden. Daraus ergab sich sofort die Construction der *Mercator*'schen Seekarten, ebenso wie die der Karten der nördlichen und südlichen Halbkugel. Wie aber die heutzutage übliche Construction der Halbkugeln, die von einem beliebigen Orte aus als obere und untere erscheinen[16]), aus meinen Formeln folgt, war nicht recht ersichtlich, obwohl auch diese Karten die vorher erwähnte Eigenschaft besitzen. Das hat mich veranlasst, genauer zu untersuchen, wie auch die letztgenannte Art der Darstellung mit den allgemeinen dort aufgestellten Formeln zusammenhängt und am besten aus ihnen abgeleitet werden kann.

§ 2. Die allgemeinen Formeln, welche ich für derartige Kartenentwürfe entwickelt hatte, sind folgende. Ist für irgend einen Punkt auf der Kugel v der Abstand vom Pole, t die von einem bestimmten Anfangsmeridiane an gerechnete Länge,

und sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten, welche die Lage des entsprechenden Punktes der Ebene bestimmen, so ist[17])

$$x = \Delta\left[\log\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}v) + t\sqrt{-1}\right] + \Delta\left[\log\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}v) - t\sqrt{-1}\right],$$
$$y\sqrt{-1} = \Delta\left[\log\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}v) + t\sqrt{-1}\right] - \Delta\left[\log\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}v) - t\sqrt{-1}\right].$$

Man kann die erste dieser Gleichungen auch folgendermaassen schreiben:

$$\begin{aligned} x = {} & \Delta\left[\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cos t + \sqrt{-1}\sin t\right)\right] \\ & + \Delta\left[\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cos t - \sqrt{-1}\sin t\right)\right] \end{aligned}$$

und entsprechend die zweite. Beachtet man ferner, dass

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cos t \pm \sqrt{-1}\sin t\right)} = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cos t \mp \sqrt{-1}\sin t\right)$$

ist, so kann man den vorstehenden Formeln folgende Gestalt geben:

$$\begin{aligned} x = {} & \Delta\left[\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cot t + \sqrt{-1}\sin t\right)\right] \\ & + \Delta\left[\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cos t - \sqrt{-1}\sin t\right)\right], \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} y\sqrt{-1} = {} & \Delta\left[\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cos t + \sqrt{-1}\sin t\right)\right] \\ & - \Delta\left[\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}v)\left(\cos t - \sqrt{-1}\sin t\right)\right]. \end{aligned}$$

[**134**] Lässt man das Zeichen Δ, das eine unbestimmte Function bezeichnet, fort, so gehen, wie leicht ersichtlich, die beiden ersten Gleichungen des § 2 ohne Weiteres in die Formeln für die Seekarten über, während die beiden letzten Gleichungen die Construction der Karten der nördlichen und südlichen Halbkugel ergeben.

§ 3. Um nun leichter zu ermitteln, wie auch die übrigen Projectionen, die auf demselben Princip beruhen, aus unseren Formeln abgeleitet werden können, will ich die Grundzüge der Projection, die man gewöhnlich als stereographische zu bezeichnen pflegt, hier ausführlich entwickeln. Bei dieser Projection wird die Kugelfläche so auf eine die Kugel berührende Ebene projicirt, wie sie nach den Regeln der Perspective einem Beobachter erscheint, der sich in dem dem Berührungspunkte entgegengesetzten Punkte der Kugel befindet[18]). Es

stelle (Fig. 4) der Kreis AMC die Kugel dar und die Linie EF die Ebene, welche die Kugel in C berührt. Dann ist der Punkt, in dem der Beobachter sich befindet, der dem Punkte C entgegengesetzte Punkt A. Nimmt man nun auf der Kugel den Punkt M beliebig an, und trifft die Gerade AMS, welche A mit M verbindet, die Linie EF im Punkte S, so ist S die Projection von M. Setzt man ferner den Radius der Kugel $= 1$, mithin den Durchmesser $AC = 2$, und bezeichnet den Bogen CM mit z, so wird der Winkel $CAM = \frac{1}{2}z$, daher der Abstand

Fig. 4.

$$CS = 2 \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}z) = \frac{2 \sin z}{1 + \cos z} = 2\sqrt{\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}}.$$

§ 4. Wird von M auf AC das Loth MP gefällt, so ist $MP = \sin z$. Lässt man nun die ebene Figur um die Axe AC rotiren, so beschreibt M einen Kreis, dessen Ebene der Tangentialebene parallel und dessen Radius $= \sin z$ ist; diesem Kreise entspricht in der Tangentialebene ein mit dem Radius $CS = 2 \operatorname{tang}(\frac{1}{2}z)$ beschriebener Kreis. Der Radius jenes Kreises auf der Kugel verhält sich also zum Radius seiner Projection wie PM zu CS, oder wie AP zu AC, oder endlich wie AM zu AS. Ferner gehören zu einem Bogen des mit dem Radius PM auf der Kugel beschriebenen Kreises und zu dem entsprechenden Bogen der Projection dieses Kreises gleiche Centriwinkel.

§ 5. Weiter betrachten wir auf der Kugel einen dem Punkte M sehr nahen Punkt m; seine Projection sei s, so dass [135] dem Bogenelemente Mm die kleine Strecke Ss entspricht. Dann fragen wir, wie sich die Elemente Mm und Ss zu einander verhalten. Zu dem Zwecke beachten wir zunächst, dass der Winkel $ASC = 90^\circ - \frac{1}{2}z = AsC$ ist. Ferner ist das Maass für den Winkel AMm die Hälfte des

Bogens AM, d. h. es ist der Winkel $AMm = 90^\circ - \frac{1}{2}z$ und daher gleich dem Winkel AsC[19]). Daraus folgt, dass das Dreieck AMm dem Dreieck AsS ähnlich, und dass daher

$$Mm : Ss = AM : AS, \text{ d. h. } = AP : AC$$

ist. Dies Verhältniss ist dasselbe, das wir zwischen dem Radius PM des auf der Kugel beschriebenen Kreises und dem Radius CS des entsprechenden Kreises der Ebene gefunden hatten; ebenso wie die Radien dieser Kreise verhalten sich aber entsprechende Bogenelemente derselben. Daraus folgt, dass, wenn wir ein unendlich kleines, an dem Elemente Mm liegendes Stück der Kugelfläche ins Auge fassen, die Projection desselben dem betrachteten Stücke selbst ähnlich wird[20]). Die Projection befolgt mithin dasselbe Gesetz, aus dem ich meine allgemeinen Formeln abgeleitet hatte.

§ 6. Wie vorher möge der Kreis AGC (Fig. 5) die Kugel darstellen, deren Oberfläche auf die Ebene EF projicirt

Fig. 5.

werden soll, welche die Kugel in C berührt. Der eine Pol der Erde möge in G liegen. Diesem Pole entspricht in der Ebene der Punkt H, der von C die Entfernung

$$CH = 2 \operatorname{tang} (\tfrac{1}{2}g)$$

hat, falls g den Bogen CG bezeichnet. Ein beliebiger Punkt M der Kugel habe vom Pole den Abstand $GM = v$, während der Winkel $CGM = t$ die Länge des Punktes M ist, bezogen auf den Meridian GC als Anfangsmeridian. Endlich

denken wir uns den grössten Kugelkreis CM gezogen. Ist nun S derjenige Punkt der Projection, welcher dem Punkte M entspricht, so wird $CS = 2 \tan(\frac{1}{2} CM)$ und der Winkel $ECS =$ dem Winkel GCM. Zur Bestimmung der Lage des Punktes S muss man daher die Seite CM und den Winkel GCM des sphärischen Dreiecks GCM berechnen[21]).

§ 7. In dem sphärischen Dreieck GCM sind zwei Seiten $CG = g$, $GM = v$ und der eingeschlossene Winkel $MGC = t$ bekannt. Die Grundformel der sphärischen Trigonometrie ergiebt daher:

$$\cos CM = \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t,$$

[136] und da

$$CS = 2 \tan(\tfrac{1}{2} CM) = \frac{2 \sin CM}{1 + \cos CM} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos CM}{1 + \cos CM}}$$

ist, so erhalten wir

$$CS = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos g \cos v - \sin g \sin v \cos t}{1 + \cos g \cos v + \sin g \sin v \cos t}}.$$

Ferner wird[22])

$$\tan GCM = \frac{\sin v \sin t}{\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t},$$

eine Gleichung, die gleichzeitig die Tangente des Winkels ECS der Projection ergiebt.

§ 8. Wir fällen jetzt von dem Punkte S der Projection auf die feste Gerade EF, auf der der Pol H liegt, das Loth SX und nennen die Coordinaten CX und SX resp. x und y. Dann ist

$$CS = \frac{2 \sin CM}{1 + \cos CM},$$

daher

$$x = \frac{2 \sin CM \cdot \cos GCM}{1 + \cos CM}, \quad y = \frac{2 \sin CM \cdot \sin GCM}{1 + \cos CM},$$

und hieraus folgt

$$\frac{y}{x} = \tan GCM = \frac{\sin v \sin t}{\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t}.$$

Ausserdem ergiebt sich aus der oben gefundenen Gleichung:

$$x^2 + y^2 = CS^2 = \frac{4\,(1 - \cos v\ \cos g - \sin v\ \sin g\ \cos t)}{1 + \cos v\ \cos g + \sin v\ \sin g\ \cos t}.$$

Damit hat man zwei Gleichungen zur Berechnung der Coordinaten x und y.

§ 9. Noch leichter kann man die Werthe dieser Coordinaten direct auf folgendem Wege finden. Aus der Gleichung:

$$\sin t : \sin CM = \sin GCM : \sin v$$

folgt

$$\sin CM \cdot \sin GCM = \sin v \cdot \sin t\,.$$

Mit Benutzung dieser Gleichung wird [die letzte Gleichung des § 7]:

$$\operatorname{tang} GCM = \frac{\sin GCM}{\cos GCM} = \frac{\sin CM \cdot \sin GCM}{\cos v\ \sin g - \sin v\ \cos g\ \cos t},$$

mithin

$$\sin CM \cdot \cos GCM = \cos v\ \sin g - \sin v\ \cos g\ \cos t$$

und daher weiter

$$x = \frac{2\,(\cos v\ \sin g - \sin v\ \cos g\ \cos t)}{1 + \cos CM}, \quad y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos CM}.$$

Substituirt man endlich für CM seinen Werth (§ 7), so erhält man für die Coordinaten folgende Ausdrücke:

$$x = \frac{2\,(\cos v\ \sin g - \sin v\ \cos g\ \cos t)}{1 + \cos v\ \cos g + \sin v\ \sin g\ \cos t},$$

$$y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos v\ \cos g + \sin v\ \sin g\ \cos t}.$$

[137] § 10. Setzt man in diesen Formeln $v = 0$, so erhält man die Coordinaten des Punktes, den der Pol H in der Projection einnimmt. Für denselben ist

$$x = \frac{2 \sin g}{1 + \cos g} = 2 \operatorname{tang} (\tfrac{1}{2} g) = CH, \quad y = 0\,.$$

Auch den Ort des andern Poles kann man leicht angeben; man hat nur $v = 180^\circ$ zu setzen. Dadurch erhält man:

$$x = \frac{-2 \sin g}{1 - \cos g}, \quad y = 0\,.$$

Ist K (Fig. 5, S. 41) dieser zweite Pol, so wird also

$$CK = \frac{2 \sin g}{1 - \cos g} = 2 \operatorname{cotg} (\tfrac{1}{2} g).$$

Nimmt man ferner $CE = CF = 2$, so wird EF der Durchmesser des Kreises, innerhalb dessen die ganze Halbkugel, deren Mitte C ist, abgebildet wird. Der Durchmesser dieses Kreises ist $= 4$, d. h. doppelt so gross wie der Durchmesser der Kugel.

§ 11. Um in unserer Projection den Aequator zu ermitteln, nehmen wir $v = 90^\circ$; dann stellen x und y die Coordinaten eines Punktes des Aequators der Karte dar, und es wird

$$x = \frac{-2 \cos g \cos t}{1 + \sin g \cos t}, \quad y = \frac{2 \sin t}{1 + \sin g \cos t}.$$

Ferner ergiebt die in § 8 aufgestellte Formel für $x^2 + y^2$:

$$x^2 + y^2 = \frac{4(1 - \sin g \cos t)}{1 + \sin g \cos t},$$

und daher ist

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{-\cos g \cos t}{2(1 - \sin g \cos t)},$$

mithin

$$\cos t = \frac{2x}{2x \sin g - (x^2 + y^2) \cos g};$$

setzt man diesen Werth in die Gleichung für x, so erhält man:

$$4x \sin g - (x^2 + y^2) \cos g = -4 \cos g \text{ [23]}.$$

Es wird also

$$x^2 + y^2 = \frac{4(x \sin g + \cos g)}{\cos g}$$

und weiter

$$y^2 + (2 \operatorname{tang} g - x)^2 = \frac{4}{\cos^2 g}.$$

Daraus sieht man, dass der Aequator der Karte ein mit dem Radius $\dfrac{2}{\cos g}$ beschriebener Kreis wird. Um den Mittel-

punkt dieses Kreises zu finden, trage man (Fig. 6) die Strecke $CJ = 2 \operatorname{tang} g$ auf der x-Axe ab, wodurch $JX = 2 \operatorname{tang} g - x$ wird; und da

$$XS^2 + JX^2 = \frac{4}{\cos^2 g}$$

sein muss, so folgt, dass $JS = \dfrac{2}{\cos g}$ wird, d. h. JS hat eine constante Länge. Dieser Punkt J wird der Mittelpunkt des dem Aequator entsprechenden Kreises, wobei $CJ = 2 \operatorname{tang} g$ ist. Errichtet man noch [138] in C das Loth $CD = 2$, so wird [Winkel $JDC = g$ und daher] $JD = \dfrac{2}{\cos g}$. Man erhält also den Aequator der Karte, indem man um J mit JD einen Kreis beschreibt.

Fig. 6.

§ 12. Wir wollen jetzt auch die Parallelkreise unserer Karte bestimmen. Dazu sollen, um die Rechnung übersichtlicher zu machen, zur Abkürzung folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$a = 2 \sin g \cos \alpha, \qquad b = 2 \cos g \sin \alpha,$$
$$c = 1 + \cos g \cos \alpha, \quad d = \sin g \sin \alpha,$$
$$e = 4 - 4 \cos g \cos \alpha.$$

Hier ist der Buchstabe α an Stelle des früheren v gesetzt, so dass α den Abstand des betrachteten Parallelkreises vom Pole bezeichnet. Dann nehmen unsere Gleichungen die Form an:

$$x = \frac{a - b \cos t}{c + d \cos t}, \quad x^2 + y^2 = \frac{e - 4d \cos t}{c + d \cos t}.$$

Aus der ersten derselben folgt

$$\cos t = \frac{a - cx}{b + dx},$$

und nach Substitution dieses Ausdruckes wird die zweite

$$x^2 + y^2 = \frac{d(e + 4c)x + be - 4ad}{bc + ad}.$$

Drückt man a, b, c, d, e wieder durch g und α aus, so erhält man:

$$x^2 + y^2 = \frac{4[x \sin g + \cos g - \cos \alpha]}{\cos g + \cos \alpha}.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$y^2 + \left(\frac{2 \sin g}{\cos g + \cos \alpha} - x\right)^2 = \frac{4 \sin^2 \alpha}{(\cos g + \cos \alpha)^2},$$

so erkennt man, dass die Projection des betrachteten Parallelkreises ein Kreis mit dem Radius $\frac{2 \sin \alpha}{\cos g + \cos \alpha}$ ist, dessen Mittelpunkt auf der Axe EF in dem Punkte L liegt (Fig. 6, S. 45), dessen Abstand von C

$$CL = \frac{2 \sin g}{\cos g + \cos \alpha}$$

ist.

§ 13. Weiter wollen wir noch die Projectionen aller Meridiane suchen. Zunächst ist für $t = 0$ auch $y = 0$, d. h. die Gerade HK (Fig. 5, S. 41) stellt den Anfangsmeridian dar, von dem aus die Länge gezählt wird. Es sei ferner $t = \beta$ die Neigung des gesuchten Meridians gegen diesen Anfangsmeridian, so werden unsere Gleichungen

$$x = \frac{2(\sin g \cos v - \cos \beta \cos g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v},$$

$$y = \frac{2 \sin \beta \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v},$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4(1 - \cos g \cos v - \cos \beta \sin g \sin v)}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v};$$

und aus diesen Gleichungen hat man v zu eliminiren. Zu dem Zwecke dividiren wir die beiden ersten, so wird

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \beta \sin v}{\sin g \cos v - \cos \beta \cos g \sin v} = \frac{\sin \beta \operatorname{tang} v}{\sin g - \cos \beta \cos g \operatorname{tang} v},$$

und daraus folgt

$$\operatorname{tang} v = \frac{y \sin g}{x \sin \beta + y \cos \beta \cos g}.$$

[139] § 14. Um diesen Werth möglichst bequem benutzen zu können, bilden wir aus den obigen Gleichungen zunächst die folgende:

$$4 - x^2 - y^2 = \frac{8 \cos g \cos v + 8 \cos \beta \sin g \sin v}{1 + \cos g \cos v + \cos \beta \sin g \sin v}$$

und dividiren dieselbe durch y; dadurch ergiebt sich

$$\frac{4 - x^2 - y^2}{y} = \frac{4 \cos g \cos v + 4 \cos \beta \sin g \sin v}{\sin \beta \sin v}$$

$$= \frac{4 \cos g + 4 \cos \beta \sin g \operatorname{tang} v}{\sin \beta \operatorname{tang} v}.$$

Setzen wir hier an Stelle von tang v den obigen Werth ein, so wird

$$\frac{4 - x^2 - y^2}{y} = \frac{4y \cos \beta + 4x \sin \beta \cos g}{y \sin \beta \sin g},$$

und daraus folgt

$$x^2 + y^2 = 4 - \frac{4y \cos \beta + 4x \sin \beta \cos g}{\sin \beta \sin g}.$$

Das ist ebenfalls die Gleichung eines Kreises. Somit kann man schliessen, dass alle grössten Kreise, die man auf der Kugel ziehen kann, gleichfalls durch Kreisbogen auf der Karte dargestellt werden oder auch durch gerade Linien[24]).

§ 15. Um nun einerseits den Mittelpunkt, andererseits den Radius eines jeden Meridians unserer Karte zu ermitteln, formen wir die eben gefundene Gleichung folgendermaassen um:

$$\left(\frac{2 \cos g}{\sin g} + x\right)^2 + \left(\frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g} + y\right)^2 = \frac{4}{\sin^2 \beta \sin^2 g}.$$

Wenn daher (Fig. 7, S. 48) wieder H und K die Pole der Karte sind, so dass [nach § 10]

$$CH = 2 \operatorname{tang} (\tfrac{1}{2} g) = \frac{2 \sin g}{1 + \cos g},$$

$$CK = 2 \operatorname{cotg} (\tfrac{1}{2} g) = \frac{2 \sin g}{1 - \cos g},$$

mithin die ganze Strecke

$$HK = \frac{4}{\sin g}, \quad \tfrac{1}{2} HK = \frac{2}{\sin g}$$

ist, so wird, falls O die Mitte von HK ist,

$$CO = \frac{2 \cos g}{\sin g};$$

ferner, da $CX = x$ war,

$$OX = \frac{2 \cos g}{\sin g} + x.$$

Errichten wir in O auf der Axe das Loth

$$ON = \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g}$$

Fig. 7.

und machen $XL = ON$, so wird

$$SL = \frac{2 \cos \beta}{\sin \beta \sin g} + y$$

und daher

$$OX^2 + SL^2 = LN^2 + SL^2 = NS^2 = \frac{4}{\sin^2 \beta \sin^2 g},$$

d. h.

$$NS = \frac{2}{\sin \beta \sin g}.$$

Man erkennt hieraus, dass der Punkt N der Mittelpunkt des zu beschreibenden Meridians ist, sein Radius aber $= \frac{2}{\sin \beta \sin g}$, und genau dieselbe Länge hat NH. Das muss auch der Natur der Sache nach der Fall sein, da alle Meridiane der Karte ja durch die beiden Pole gehen müssen[25]).

[140] Ableitung dieser Projection aus den allgemeinen Formeln.

§ 16. Es fragt sich jetzt, welche Form man der Function Δ [§ 2] geben muss, um die so eben erörterte Projection zu erhalten. Zunächst erkennt man, dass höhere Potenzen [des Arguments] als die erste in ihr nicht vorkommen

können, weil sonst Vielfache der Winkel t und v auftreten würden. Sodann muss die in Rede stehende Function ein Bruch sein, da sich für die Ausdrücke von x und y (§ 9) Brüche ergeben haben. Deshalb wollen wir für $\Delta(z)$ folgende allgemeine Form annehmen:

$$\Delta(z) = \frac{a + bz}{c + dz},$$

während wir für z die letzte der oben (§ 2) angegebenen Formen wählen, nämlich

$$z = \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}v\right) \cdot \left(\cos t \pm \sqrt{-1}\,\sin t\right).$$

Wir betrachten demnach die Function

$$\frac{a + b \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}v\right) \cdot \left(\cos t \pm \sqrt{-1}\,\sin t\right)}{c + d \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}v\right) \cdot \left(\cos t \pm \sqrt{-1}\,\sin t\right)}$$

und ersetzen darin $\operatorname{tang}(\frac{1}{2}v)$ durch $\dfrac{\sin v}{1 + \cos v}$; dadurch nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\frac{a(1 + \cos v) + b \sin v \cdot \left(\cos t \pm \sqrt{-1}\,\sin t\right)}{c(1 + \cos v) + d \sin v \cdot \left(\cos t \pm \sqrt{-1}\,\sin t\right)}.$$

§ 17. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, schreiben wir den vorstehenden Bruch einfacher

$$\frac{P \pm Q\sqrt{-1}}{R \pm S\sqrt{-1}},$$

wo

$$P = a(1 + \cos v) + b \sin v \cos t, \quad Q = b \sin v \sin t,$$
$$R = c(1 + \cos v) + d \sin v \cos t, \quad S = d \sin v \sin t$$

ist. Dann haben wir für die Coordinaten x, y folgende Ausdrücke:

$$x = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} + \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}},$$

$$y\sqrt{-1} = \frac{P + Q\sqrt{-1}}{R + S\sqrt{-1}} - \frac{P - Q\sqrt{-1}}{R - S\sqrt{-1}}.$$

Aus diesen ergiebt sich

$$x = \frac{2PR + 2QS}{R^2 + S^2}, \quad y = \frac{2QR - 2PS}{R^2 + S^2}.$$

§ 18. Setzen wir nun an Stelle von P, Q, R, S wieder ihre Werthe, so erhalten wir für den gemeinsamen Nenner

$$R^2 + S^2 = c^2(1 + \cos v)^2 + 2cd(1 + \cos v)\sin v \cos t + d^2 \sin^2 v$$
$$= (1 + \cos v)\left[c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)\right].$$

[141] Ferner werden die Zähler von x und y:

$$PR + QS$$
$$= (1 + \cos v)\left[ac(1 + \cos v) + (bc + ad)\sin v \cos t + bd(1 - \cos v)\right],$$

$$QR - PS = (1 + \cos v)\,(bc - ad)\sin v \sin t.$$

Somit erhalten wir für die Coordinaten folgende Ausdrücke:

$$x = \frac{2ac(1 + \cos v) + 2(bc + ad)\sin v \cos t + 2bd(1 - \cos v)}{c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)},$$

$$y = \frac{2(bc - ad)\sin v \sin t}{c^2(1 + \cos v) + 2cd \sin v \cos t + d^2(1 - \cos v)}.$$

§ 19. Vergleichen wir diese Formeln mit denen, die wir oben (§ 9) gefunden hatten, nämlich

$$x = \frac{2(\cos v \sin g - \sin v \cos g \cos t)}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t},$$

$$y = \frac{2 \sin v \sin t}{1 + \cos v \cos g + \sin v \sin g \cos t},$$

so sehen wir, dass die letzteren der Form nach mit den ersteren übereinstimmen; und man kann nun leicht die Werthe ermitteln, welche man den Constanten a, b, c, d beilegen muss, um die Uebereinstimmung zu einer vollständigen zu machen. Damit zunächst die Nenner identisch werden, muss

$$c^2 + d^2 = 1, \quad c^2 - d^2 = \cos g, \quad 2cd = \sin g$$

sein. Aus den beiden ersten dieser Gleichungen ergiebt sich

$$c^2 = \frac{1 + \cos g}{2} = \cos^2(\tfrac{1}{2}g), \qquad d^2 = \frac{1 - \cos g}{2} = \sin^2(\tfrac{1}{2}g),$$

d. h.

$$c = \cos(\tfrac{1}{2}g), \quad d = \sin(\tfrac{1}{2}g),$$

und die dritte Gleichung wird von selbst erfüllt, da

$$2cd = 2\sin(\tfrac{1}{2}g)\cos(\tfrac{1}{2}g) = \sin g$$

ist. Damit die Zähler der beiden Ausdrücke für x identisch werden, ist erforderlich, dass

$$ac + bd = 0, \quad ac - bd = \sin g, \quad bc + ad = -\cos g$$

wird, oder, falls man die oben gefundenen Werthe von c und d substituirt:

$$a\cos(\tfrac{1}{2}g) + b\sin(\tfrac{1}{2}g) = 0, \quad a\cos(\tfrac{1}{2}g) - b\sin(\tfrac{1}{2}g) = \sin g,$$
$$b\cos(\tfrac{1}{2}g) + a\sin(\tfrac{1}{2}g) = -\cos g.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen ergeben

$$a = \frac{\sin g}{2\cos(\tfrac{1}{2}g)} = \sin(\tfrac{1}{2}g), \quad b = \frac{-\sin g}{2\sin(\tfrac{1}{2}g)} = -\cos(\tfrac{1}{2}g),$$

und diese Werthe genügen von selbst der dritten Gleichung. Es erübrigt [142] daher nur noch, zu untersuchen, ob vermöge der gefundenen Werthe auch die Zähler der beiden Ausdrücke für y dieselben werden. Dazu ist erforderlich, dass

$$bc - ad = 1$$

wird. Nun geben unsere Werthe aber $bc = -\cos^2(\tfrac{1}{2}g)$, $ad = \sin^2(\tfrac{1}{2}g)$, mithin wird

$$bc - ad = -1.$$

Beachtet man noch, dass man die positive und negative Richtung jeder Coordinatenaxe vertauschen kann, so sieht man, dass die Uebereinstimmung eine vollständige ist.

§ 20. Aus den vorstehenden Erörterungen erkennt man, dass unsere allgemeinen Formeln auf die in Rede stehende stereographische Projection geführt haben würden, wenn wir für die Function $\Delta(z)$ von vorne herein die Form angenommen hätten:

$$\Delta(z) = \frac{\sin(\tfrac{1}{2}g) - z\cos(\tfrac{1}{2}g)}{\cos(\tfrac{1}{2}g) + z\sin(\tfrac{1}{2}g)} = \frac{\tang(\tfrac{1}{2}g) - z}{1 + z\tang(\tfrac{1}{2}g)}.$$

Uebrigens mag hier bemerkt werden, dass diese Art der Projection für die praktische Anwendung, welche die Geographie erfordert, ausserordentlich zweckmässig ist, da sie die wahre Gestalt der einzelnen Gebiete der Erde nicht stark verzerrt. Am wichtigsten ist jedoch, dass bei dieser Projection nicht nur alle Meridiane und Parallelkreise durch Kreise oder sogar durch gerade Linien dargestellt werden, sondern dass auch alle auf der Kugel beschriebenen grössten Kugelkreise in Kreisbogen oder gerade Linien übergehen, während andere Annahmen, die man etwa betreffs der Function Δ machen könnte, gerade diesen Vortheil nicht besitzen würden[26].

---

[143] III.

Ueber die De Lisle'sche Kartenprojection und ihre Anwendung auf die Gesammtkarte des russischen Reiches.[27]

(De projectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii russici usitata.)

Von

Leonhard Euler.

[Acta Acad. Scient. Imperial. Petropolitanae pro anno MDCCLXXVII, T. I, p. 143—153.]

---

§ 1. Als vor längerer Zeit erwogen wurde, welche Art der Projection man für die Gesammtkarte des russischen Reiches benutzen solle, bot sich zuerst die stereographische Projection dar, mittelst deren man die beiden Erdhalbkugeln, die von irgend einem Orte aus als obere und untere erscheinen[16]), darzustellen pflegt. Denn bei dieser Darstellungsart werden nicht allein alle Parallelkreise von den Meridianen senkrecht geschnitten, sondern es werden auch die kleinsten Theile der Karte den entsprechenden Theilen der Kugelfläche ähnlich. In der That hat damals ein vortrefflicher Geograph, der Wittenberger Professor *Hasius*, bei dem Entwurf einer Gesammtkarte des genannten Reiches diese Art der Projection angewandt[27a]).

§ 2. Doch traten in diesem Kartenentwurf bald zwei erhebliche Uebelstände hervor, die ihn als unzweckmässig erscheinen liessen. Einmal sind auf dem mittleren Meridian die

Breitengrade zu ungleich; sie sind in der Nähe des Aequators nur halb so gross wie an den Polen[28]). Daraus entstand für unsere Karte der grosse Uebelstand, dass für die Gegenden am Rande der Karte der Maassstab ein viel grösserer war als für die in der Mitte der Karte gelegenen. So würde einem die Karte Betrachtenden z. B. die Provinz Kamtschatka fast viermal so gross erscheinen, als eine Provinz von derselben Grösse in der Mitte der Karte. [**144**] Dem gegenüber erschien es bei der Construction einer solchen Karte vor Allem erforderlich, dass Gebiete von gleicher Grösse auch auf der Karte gleiche Flächen einnehmen, gleichgültig, welchem Theile der Karte sie angehören.

§ 3. Der zweite Uebelstand bestand darin, dass bei dieser Projectionsart die Meridiane sich von der Mitte nach dem Rande zu immer mehr krümmen, so dass die äussersten Meridiane sogar durch Halbkreise dargestellt werden. So würden z. B. in der Provinz Kamtschatka alle Meridiane als ziemlich stark gekrümmte Kreisbogen erscheinen. Wenn nun Jemand diesen Theil aus der allgemeinen Karte herausschneiden oder abzeichnen würde, um dadurch eine Specialkarte jener Provinz zu erhalten, so würde letztere Karte sehr unzweckmässig sein und den Regeln, die man gewöhnlich bei der Construction geographischer Karten befolgt, durchaus nicht entsprechen. Aber gerade das war der wesentlichste Zweck der Karte, dass aus ihr alle Specialkarten durch blosses Abzeichnen, ohne jede weitere Reduction, erhalten würden, und dass dieselben dabei die übliche Gestalt hätten.

§ 4. Nachdem aus den angeführten Gründen die in Rede stehende Projection verworfen war, wurde die Projection einer Prüfung unterzogen, mittelst deren man gewöhnlich die nördliche und südliche Halbkugel darstellt. Aber obwohl hier alle Meridiane durch gerade Linien wiedergegeben werden, die im Pole zusammenlaufen, und dadurch der eine der obigen Uebelstände vermieden wird, so musste doch auch diese Projection verworfen werden, weil auf allen Meridianen die Breitengrade zu ungleich sind, nämlich am Pol nur halb so gross wie am Aequator, während doch gefordert wurde, dass der Maassstab überall auf der Karte derselbe sei und die wahre Grösse der einzelnen Provinzen bei einem Blick auf die Karte richtig geschätzt werden könne.

§ 5. Man musste daher eine andere Art der Projection ersinnen, bei der erstens alle Meridiane durch gerade Linien dargestellt würden, auf welchen auch alle Breitengrade dieselbe Grösse

erhielten, und bei der zweitens alle Meridiane die Parallelkreise unter rechten Winkeln schnitten. Da es indessen auf diese Art sicher nicht [145] zu erreichen ist, dass die Grade der Parallelkreise zu den Meridiangraden überall in dem richtigen Verhältniss stehen, in dem nämlich, das sie auf der Kugel wirklich haben, so schien es gerathen, lieber die letzte Forderung nicht genau zu erfüllen, als auf die vorerwähnten Vortheile zu verzichten. Hier erhob sich nun die äusserst wichtige Frage: wie müssen die Meridiane und Parallelkreise der Karte beschaffen sein, damit das Verhältniss der Längen- und Breitengrade zu einander von dem wahren Werthe, den dasselbe auf der Kugel hat, möglichst wenig abweicht? Und zwar soll die Abweichung, die man nun einmal in den Kauf nehmen muss, falls man die oben erwähnten Vortheile erhalten will, so gering sein, dass man die Fehler kaum bemerken kann.

§ 6. Diese Forderung war ein berühmter Astronom und Geograph jener Zeit, *De Lisle*[27]), dem die Anfertigung einer solchen Gesammtkarte zuerst übertragen war, dadurch zu erfüllen bestrebt, dass er auf zwei besonders bemerkenswerthen Parallelkreisen das Verhältniss zwischen Längen- und Breitengraden dem wahren Verhältnisse genau gleich machte. Er war der Ansicht, dass, wenn die genannten Parallelkreise sowohl von dem mittleren Parallelkreis der ganzen Karte als von den am äussersten Rande gelegenen gleiche Abstände hätten, die Abweichung nirgends erheblich sein könne. Hier fragt es sich nun, welche beiden Parallelkreise zweckmässiger Weise auszuwählen sind, damit auch die grössten Abweichungen, die überhaupt entstehen können, so klein wie möglich werden.

§ 7. Es sei (Fig. 8) AB ein Theil irgend eines Meridians, der durch das russische Reich geht, und zwar sei A der südlichste, B der nördlichste in Betracht kommende Punkt desselben. Die Breite von A sei $= a$, die von B $= b$; es wird somit nahezu $a = 40^\circ$, $b = 70^\circ$. Ferner bezeichne δ die Länge eines Grades auf allen Meridianen, endlich seien P und Q die Punkte, für welche die Längen- und Breitengrade in richtigem Verhältniss zu einander stehen, und es sei p die Breite von P, q die von Q. Da die Grade irgend eines Parallelkreises der Kugel zu den Meridiangraden sich verhalten wie der Cosinus der Breite zu 1,

Fig. 8.

so muss an der Stelle P ein Längengrad die Grösse $Pp = \delta \cos p$ und an der Stelle Q die Grösse $Qq = \delta \cos q$ haben, [**146**] und zwar kann man die kleinen Linien Pp, Qq, obwohl sie in Wirklichkeit Kreisbogen sind, als gerade Linien ansehen, die auf dem Meridian AB senkrecht stehen[29]).

§ 8. Man ziehe jetzt durch die Punkte p und q die Gerade pqO, welche den Hauptmeridian AB in O schneide. Diese Gerade Oqp stellt den nächsten Meridian dar, der von dem Hauptmeridian um einen Längengrad absteht; und auf gleiche Weise können von dem Punkte O aus die übrigen Meridiane leicht gezogen werden. Zur Bestimmung des Schnittpunktes O haben wir die Proportion

$$(Pp - Qq) : PQ = Pp : PO\,,$$

d. h.

$$\delta(\cos p - \cos q) : q - p = \delta \cos p : PO\,,$$

mithin

$$PO = \frac{(q-p)\cos p}{\cos p - \cos q}\,.$$

Nimmt man etwa $p = 50^\circ$, $q = 60^\circ$, so findet man den Abstand $PO = 45^\circ 1'$. Da nun der Punkt P vom Aequator um 50° absteht, beträgt der Abstand des Punktes O vom Aequator $95^\circ 1'$; O liegt daher jenseits des Erdpoles in einer Entfernung von $5^\circ 1'$ von letzterem.

§ 9. Da hiernach jener Punkt O, in dem alle Meridiane der Karte sich schneiden, von dem wahren Erdpole, von dem auf der Kugel alle Meridiane ausgehen, verschieden ist, so würde für solche Gebiete, die dem Pole sehr nahe liegen, ein ganz verkehrtes Bild entstehen. Indessen brauchen auf einer Gesammtkarte des russischen Reiches keine Gebiete jenseits des 70. Breitengrades dargestellt zu werden. Falls daher nur für diese Breite der Fehler kein sehr grosser ist, ist jene Abweichung ohne Bedeutung.

Hat man den Punkt O gefunden, so beschreibe man von ihm aus mit dem Radius OP einen Kreis, trage auf dem Umfang desselben gleiche Stücke von der Länge $\delta \cos p$ ab, d. h. Stücke, die gleich der wirklichen Länge eines Grades dieses Parallelkreises sind, und ziehe dann von O nach den einzelnen Theilpunkten gerade Linien, so bilden diese die Meridiane der Karte. Ferner erhält man die Parallelkreise der Karte, indem man um O Kreise beschreibt, deren Radien um je einen Meridiangrad unterschieden sind. Für die beiden

Breiten p und q ist dann von selbst das Verhältniss von Längen- und Breitengraden das richtige. So kann man das Gradnetz der Gesammtkarte leicht construiren, und darin die einzelnen Orte, resp. Provinzen einzutragen, bietet keine Schwierigkeit weiter dar.

[**147**] § 10. Wir wollen nunmehr vor Allem sehen, wie sehr diese Darstellung in den äussersten Punkten A und B' der Karte von der Wirklichkeit abweicht. Es sei Aa ein Grad des durch A, Bb ein Grad des durch B gehenden Parallelkreises. Diese Linien müssten eigentlich die Längen $\delta \cos a$ und $\delta \cos b$ haben. Um die Grösse zu finden, die sie wirklich auf der Karte haben, bestimmen wir den Winkel POp, der einem Längengrade entspricht. Derselbe ist

$$= \frac{Pp}{PO} = \frac{\delta\,(\cos p - \cos q)}{q - p} = \frac{\cos p - \cos q}{q - p},$$

da $\delta = 1^\circ$ ist. Diesen Winkel wollen wir der Kürze halber mit ω bezeichnen, also

$$\omega = \frac{\delta\,(\cos p - \cos q)}{q - p}$$

setzen. Nehmen wir, wie oben, $p = 50^\circ$, $q = 60^\circ$, so wird jener Winkel $POp = \omega = 49'\,6''$. Bei Berechnung desselben ist zu beachten, dass die Differenz $q - p$ nicht in Graden, sondern in Theilen des Radius ausgedrückt werden muss, und zwar ist, nebenbei bemerkt, ein Grad $= 0{,}01745329$. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass die Winkel ω, welche die einzelnen Längengrade bei O mit einander bilden, etwas kleiner als ein Grad sind[30]).

§ 11. Um die Frage allgemein zu behandeln, bezeichnen wir jenen Winkel, der einem Grade entspricht, mit ω, also

$$\omega = \frac{\delta\,(\cos p - \cos q)}{q - p};$$

und da hier p und q in Graden ausgedrückt sind, muss man die Differenz $q - p$ mit $0{,}01745329$ multipliciren, einer Zahl, für die wir der Kürze halber α schreiben wollen, so dass

$$\omega = \frac{\delta\,(\cos p - \cos q)}{\alpha\,(q - p)}$$

wird; und hierin ist $\delta = 1^\circ$ zu setzen, wenn wir ω in Graden haben wollen. Ausserdem wollen wir annehmen, dass der

Abstand des Punktes O von dem Pole, jenseits dessen er liegt, z Grade betrage. Da der Abstand des Punktes P vom Pole $= 90^\circ - p$ ist, so wird sein Abstand von $O = 90^\circ - p + z$, also in Theilen des Radius $= \alpha(90^\circ - p + z)$. Für dieselbe Strecke ist vorher gefunden

$$PO = \frac{(q-p)\cos p}{\cos p - \cos q};$$

und zwar ist dies die Länge von PO, in Graden ausgedrückt. Diese Länge muss also $= 90^\circ - p + z$ sein, woraus

$$z = \frac{(q-p)\cos p}{\cos p - \cos q} - 90^\circ + p$$

folgt.

§ 12. Weiter ist der Abstand des Punktes A vom Pole $= 90^\circ - a$, daher die Strecke $AO = 90^\circ - a + z$ und in Theilen [148] des Radius $= \alpha(90^\circ - a + z)$. Diese Strecke giebt, mit ω multiplicirt, die Länge des Grades Aa; diese Länge wird demnach[31])

$$\frac{\delta(\cos p - \cos q)(90^\circ - a + z)}{q-p},$$

während ihre wirkliche Grösse $\delta \cos a$ sein müsste. Die Differenz zwischen beiden Werthen giebt den Fehler der Karte im Endpunkte A an. Ebenso wird am anderen Ende B ein Grad eines Parallelkreises der Karte

$$= \frac{\delta(90^\circ - b + z)(\cos p - \cos q)}{q-p},$$

während die Länge dieses Grades in Wirklichkeit $= \delta \cos b$ ist. Die Differenz zwischen beiden Werthen ergiebt den Fehler der Karte am Ende B.

§ 13. Zunächst wird man nun zweckmässiger Weise die Lage der beiden Zwischenpunkte P, Q so bestimmen, dass die Fehler an den beiden äussersten Enden A, B einander gleich werden. Das giebt die Gleichung:

$$\frac{(90^\circ - a + z)(\cos p - \cos q)}{q-p} - \cos a$$
$$= \frac{(90^\circ - b + z)(\cos p - \cos q)}{q-p} - \cos b,$$

und diese kann man auf folgende Form bringen:

$$(a - b)(\cos p - \cos q) + (q - p)(\cos a - \cos b) = 0 .$$

§ 14. Zur Erleichterung unserer Untersuchung wollen wir an Stelle der Grössen p und q die in Graden gemessene Strecke z, um die der Punkt O über den Pol hinaus liegt, in die Rechnung einführen, ferner den Winkel ω, der im Punkte O den einzelnen Längengraden entspricht, oder den zwei benachbarte Meridiane, die auf der Erde um einen Grad von einander abstehen, auf der Karte mit einander bilden; und zwar wollen wir annehmen, dass auch dieser Winkel ω in Graden oder in den üblichen Theilen eines Grades ausgedrückt ist. Dann können wir $\delta = 1$ setzen, und es wird die Länge des Grades eines Parallelkreises in $A = \alpha(90^\circ - a + z)\omega$, in B dagegen $= \alpha(90^\circ - b + z)\omega$. Da die wirkliche Länge dieser Grade $\cos a$, resp. $\cos b$ ist, so ergiebt die Bedingung, dass die Fehler in A und B einander gleich seien, die Gleichung:

$$[149] \quad \alpha(90^\circ - a + z)\omega - \cos a = \alpha(90^\circ - b + z)\omega - \cos b,$$

und diese lässt sich auf folgende reduciren:

$$\alpha(a - b)\omega = \cos b - \cos a$$

oder

$$\omega = \frac{\cos a - \cos b}{\alpha(b - a)},$$

und zwar ist dieser Werth in Theilen eines Grades ausgedrückt.

§ 15. Nachdem wir die Fehler der Projection an den äussersten Punkten A und B einander gleich gemacht haben, wollen wir es so einrichten, dass diese Fehler ausserdem dem grössten Fehler gleich werden, der innerhalb der Strecke AB auftreten kann. Der grösste Fehler liegt nun in der Mitte X von AB[32]), einem Punkte, dessen Breite $= \frac{a + b}{2}$ ist, woraus sich die Grösse des Fehlers

$$= \alpha\left(90^\circ - \frac{a + b}{2} + z\right)\omega - \cos\frac{a + b}{2}$$

ergiebt. Doch hat dieser Ausdruck das entgegengesetzte Vorzeichen wie die entsprechenden Ausdrücke in A und B; und man muss daher sein Vorzeichen umkehren, d. h. den Ausdruck

$$\cos\frac{a+b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z\right)\omega$$

betrachten. Setzt man diesen den beiden Fehlern in A und B gleich, so erhält man die Gleichungen:

$$\alpha(90^\circ - a + z)\omega - \cos a = \cos\frac{a+b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z\right)\omega$$

und

$$\alpha(90^\circ - b + z)\omega - \cos b = \cos\frac{a+b}{2} - \alpha\left(90^\circ - \frac{a+b}{2} + z\right)\omega.$$

§ 16. Die Gleichheit der Fehler in A und B hatte uns schon die Gleichung

$$\omega = \frac{\cos a - \cos b}{\alpha(b - a)}$$

geliefert. Setzen wir diesen Werth in die erste der beiden vorstehenden Gleichungen ein, so ergiebt sich:

$$\frac{(180^\circ - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + 2z)(\cos a - \cos b)}{b - a} = \cos a + \cos\frac{a+b}{2}$$

oder

$$180^\circ - \tfrac{3}{2}a - \tfrac{1}{2}b + 2z = \frac{b - a}{\cos a - \cos b}\left[\cos a + \cos\frac{a+b}{2}\right],$$

und hieraus folgt unmittelbar der Abstand $2z$.

§ 17. Wir wollen dies Resultat nun auf die Karte des russischen Reiches anwenden. Da hier $a = 40^\circ$, $b = 70^\circ$, also $\frac{a+b}{2} = 55^\circ$ ist, so haben wir [**150**] zunächst für den Winkel ω die Gleichung:

$$\omega = \frac{\cos 40^\circ - \cos 70^\circ}{30\alpha} = \frac{0{,}4240243}{0{,}5235987},$$

woraus man $\omega = 48' 44''$ findet. Weiter giebt die vorletzte Gleichung des § 15:

$$\alpha(85^\circ + 2z)\omega = \cos 40^\circ + \cos 55^\circ = 1{,}33962,$$

und da

$$\alpha\omega = \frac{0{,}42402}{30} = 0{,}0141$$

war, so erhalten wir

$$85^\circ + 2z = \frac{1{,}33962}{0{,}0141} = 95^\circ, \text{ d. h. } z = 5^\circ.$$ [33])

§ 18. Wir hatten vorher angenommen, dass der grösste Fehler auf die Mitte der Strecke AB fällt. Da dies nicht genau zuzutreffen braucht, wollen wir nunmehr den Punkt X bestimmen, in dem der Fehler am grössten ist. Bezeichnet x die Breite von X, so ist der Fehler dort

$$\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \cos x,$$

und das Differential dieses Ausdrucks muss verschwinden. Bei der Bildung dieses Differentials darf man ja nicht, wie gewöhnlich, $d\cos x = -\sin x\, dx$ setzen, da x hier in Graden ausgedrückt ist; vielmehr wird hier $d\cos x$ gleich $-\sin x$, multiplicirt mit dem Differential des in Graden ausgedrückten Bogens, der seinerseits $= \alpha x$ ist. Demgemäss haben wir hier zu setzen[34]):

$$d\cos x = -\sin x \cdot \alpha dx,$$

und die Bedingung, dass das Differential des obigen Ausdrucks verschwindet, giebt daher

$$-\alpha\omega\, dx + \alpha dx \sin x = 0$$

oder

$$\sin x = \omega,$$

wobei ω der oben gefundene Bruch

$$\omega = \frac{\cos a - \cos b}{\alpha(b-a)}$$

ist, der in unserem Falle $= \frac{0{,}4240243}{0{,}5235987}$ ist. Dieser Bruch ist $= \sin x$, woraus sich $x = 54^\circ 4'$ ergiebt. Der Punkt X fällt daher nicht genau in die Mitte von AB.

§ 19. Nach Ermittelung des Werthes von x haben wir für den Fehler an dieser Stelle:

$$\alpha(90^\circ - x + z)\omega - \cos x;$$

sein negativer Werth muss dem Fehler in A, resp. B gleich sein. Das giebt die Gleichung

$$\alpha(180^\circ - a - x + 2z)\omega = \cos a + \cos x;$$

und hieraus ist der Werth von z zu berechnen. Da $x = 54\frac{1}{15}$ ist, so folgt

$$85\tfrac{14}{15} + 2z = \frac{\cos a + \cos x}{\alpha\omega} = 95^\circ 56',$$

daher

$$2z = 10^{\circ}, \quad z = 5^{\circ},$$

während $\omega = 0{,}8098270$ eines Grades, d. h.

$$\omega = 48' \, 44''$$

ist[35].

[151] § 20. Wir wollen jetzt noch sehen, wie gross jener Maximalfehler an den Stellen A, B, X wird. Zu dem Zwecke berechnen wir den Fehler in A; derselbe ist

$$\alpha\omega\,(90^{\circ} - a + z) - \cos a = 55\,\alpha\omega - 0{,}7660444$$
$$= 0{,}00946\,,$$

da $\alpha\omega = 0{,}01410$ war[36]; d. h. während ein Grad auf dem Parallelkreis von A die Länge $= 0{,}76604$ hat, ist derselbe auf der Karte etwas grösser, nämlich $= 0{,}77550$. Obige Zahl stellt den Fehler dar, ausgedrückt in Theilen eines Meridiangrades, und da auf einen solchen Grad 15 Meilen gehen, beträgt der Fehler 0,14190 Meilen, d. h. ungefähr den siebenten Theil einer Meile oder eine ruthenische Werst. An dem Ende B, d. h. in der Breite 70°, wo ein Grad des Parallelkreises die Länge 0,34202 hat, beträgt jener Fehler nur den 38. Theil der ganzen Länge; ein solcher Fehler ist in jener Gegend zulässig.

§ 21. Zur Construction der Karte des russischen Reiches wird man hiernach am zweckmässigsten zunächst einen Punkt O festlegen, der auf dem Meridian BA jenseits des Poles liegt und von demselben einen Abstand von 5 Graden hat. Auf AB denke man sich dann die einzelnen Breitengrade in gleichen Abständen aufgetragen und durch die Theilpunkte Kreise beschrieben, deren Centrum O ist: diese Kreise stellen dann die Parallelkreise der Karte dar, während die Meridiane durch O gehende gerade Linien sind, die in O einen Winkel von $48' \, 45''$ mit einander bilden. Demgemäss hat, da $OA = 55^{\circ}$ ist, auf dem durch den Endpunkt A gehenden Parallelkreise ein Längengrad die Grösse $55\,\alpha\omega = 0{,}77550$; d. h. ein solcher Grad verhält sich zu einem Grade des Meridians wie $0{,}77550 : 1$. Diese Theilung kann man leicht ausführen[36].

§ 22. Da auf unserer Karte alle Meridiane durch gerade Linien dargestellt werden, werden auch andere grösste Kreise, die man auf der Kugel gezogen denkt, nicht erheblich von geraden Linien abweichen[37]. Der Aequator würde ein Kreis mit dem Centrum O und sein Radius 95° werden; die ein-

zelnen Grade des Aequators würden daher die Länge $95 \alpha \omega = 1{,}33950$ haben, statt dass sie den Meridiangraden gleich wären. Da aber der Aequator nicht mehr auf unserer Karte liegt, macht der eben erwähnte Fehler nichts aus. Wir wollen jetzt noch zusehen, um wie viel grösste Kugelkreise, die wir auf der Karte zeichnen, von geraden Linien abweichen.

[152] § 23. Zur Erleichterung dieser Untersuchung denken wir uns den mittleren Meridian AB (Fig. 9) einerseits bis zum Punkte O, andererseits bis zum Aequator verlängert, und zwar möge er letzteren in E treffen, so dass $AE = 40^\circ$ wird, $AB = 30^\circ$ und $BO = 25^\circ$. Der Pol liege ferner in π, wo $O\pi = 5^\circ$ ist. Der um O mit OE beschriebene Kreis stellt den ausserhalb der eigentlichen Karte liegenden Aequator dar. Auf letzterem nehmen wir einen Bogen EF, der 90° Längendifferenz entspricht, und dessen Centriwinkel daher $EOF = 90^\circ \cdot \omega = 72^\circ 53'$ ist, während die Strecke OF ebenfalls $= 95^\circ$ ist. Dieser Punkt F ist der gemeinsame Schnittpunkt aller grössten Kugelkreise, die senkrecht zu unserem Meridian AB gezogen werden können[38]).

Fig. 9.

§ 24. Wir wollen nun einen grössten Kugelkreis construiren, der auf AB senkrecht steht und durch einen beliebig angenommenen Punkt Z zwischen A und B geht. Die wahre Gestalt der diesem Kreise entsprechenden Curve wird von einer transcendenten Gleichung abhängen; doch wird diese Curve nicht merklich von dem Bogen eines Kreises abweichen, der durch die Punkte Z und F geht und in Z auf der Geraden AB senkrecht steht. Um die Krümmung dieses Kreisbogens ZF zu ermitteln, fälle man von F aus das Loth FG auf OE, so ist

$$OG = 95^\circ \cdot \cos 72^\circ 53' = 27{,}96024\,,$$
$$FG = 95^\circ \cdot \sin 72^\circ 53' = 90{,}79221\,.$$

Hieraus sieht man, dass die Gerade FG selbst einen Quadranten eines auf AB senkrechten grössten Kugelkreises darstellt, und da FG sehr nahe gleich 90 Meridiangraden ist, so wird längs desselben die Karte kaum eine Verzerrung haben[39]). Wenn

man dagegen durch den Endpunkt A einen zu AB senkrechten grössten Kugelkreis zieht, so wird sein Bogen AF etwas grösser als die Gerade FG. Indessen ist der Fehler nicht allzu erheblich. Denn der Radius eines solchen Kreises würde $165^{\circ},9477$ betragen, also so gross sein, dass seine Krümmung auf der Karte kaum wahrnehmbar [**153**] wäre. Um so weniger wird dies für die andern der in Rede stehenden grössten Kugelkreise der Fall sein; alle werden sich von geraden Linien nur wenig unterscheiden.

§ 25. Was hier betreffs der grössten Kugelkreise gesagt ist, die auf dem mittleren Meridian AB senkrecht stehen, gilt in gleicher Weise von allen grössten Kreisen, die andere Meridiane senkrecht durchschneiden. Daher hat man bei einer derart entworfenen Karte den ausserordentlichen Vortheil, dass gerade Linien, die von irgend einem Punkte nach einem anderen gezogen werden, ziemlich genau grössten Kreisen der Kugelfläche entsprechen und daher die Abstände irgend welcher auf der Karte gelegenen Orte ohne erheblichen Fehler mit Hülfe des Zirkels gemessen werden können. Dieser wichtigen Eigenschaften wegen verdient die erörterte Projection für eine Gesammtkarte des russischen Reiches den Vorzug vor allen andern, obwohl sie, streng genommen, nicht wenig von der Wirklichkeit abweicht.

Anmerkungen.

Allgemeine Bemerkungen.

Hinsichtlich des Lebensganges und der wissenschaftlichen Bedeutung *Euler*'s verweisen wir auf das in Heft 73 der Klassiker, S. 55—57, Gesagte. Doch sei hier noch auf ein neues Verzeichniss von *Euler*'s sämmtlichen Abhandlungen [Index operum Leonardi Euleri, confectus a *Joanne G. Hagen* S. J., Berolini, Felix L. Dames, 1896] aufmerksam gemacht, das erst nach dem Erscheinen des Heftes 73 veröffentlicht ist. —

Das vorliegende Heft bildet eine Ergänzung zu den Heften 54 und 55 der Klassiker; mit diesem Hefte enthält die Sammlung die wichtigsten Arbeiten über die mathematische Theorie der Kartenprojection aus dem Ende des vorigen und dem Anfang dieses Jahrhunderts. Der Zeit nach fallen die hier zum ersten Male in deutscher Uebersetzung veröffentlichten Arbeiten *Euler*'s zwischen die dasselbe Thema behandelnden Abhandlungen von *Lambert* (1772, cf. Heft 54) und *Lagrange* (1779, cf. Heft 55). Ueber *Lambert* geht *Euler* in mehrfacher Beziehung hinaus. Beide fassen den Begriff »Abbildung« in allgemeinerem Sinne auf, als es bis dahin geschehen. Während jedoch der Erstere, von speciellen Abbildungen ausgehend, erst allmählich auf die Verallgemeinerung geführt wird, stellt *Euler* den allgemeinen Begriff an die Spitze (cf. § 1, S. 3), und daher ist bei ihm der Ansatz der Aufgabe von vorne herein ein viel allgemeinerer. Beide Autoren stellen die wichtigen Principien der Winkeltreue (Conformität) einerseits, der Flächentreue andererseits auf; beide entwickeln aus dem ersten dieser Principien die allgemeinen Formeln für die conforme Abbildung. Während aber *Lambert* mit diesen allgemeinen Formeln nichts anzufangen weiss, sondern bei jeder Art der Abbildung specielle Ansätze, resp. Methoden

benutzt, leitet *Euler* aus den allgemeinen Formeln die speciellen Resultate für die verschiedenen Arten der stereographischen Projection her. Auch in der Behandlung der flächentreuen Abbildung geht *Euler*, sowohl was den Ansatz, als was die Resultate betrifft, über *Lambert* hinaus. Nimmt man dazu die grössere Eleganz in den analytischen Entwickelungen, so erkennt man, dass *Euler*'s Arbeiten, die übrigens keinerlei Angaben über die frühere Litteratur enthalten, einen wesentlichen Fortschritt gegenüber denen *Lambert*'s zeigen. *Lagrange* freilich führt die Aufgabe weiter als *Euler*, in so fern er einerseits die conforme Abbildung beliebiger Rotationsflächen behandelt und andererseits die allgemeinste conforme Abbildung ermittelt, bei der den Meridianen und Parallelkreisen jener Flächen Kreise der Karte entsprechen. [Auf die winkeltreue Abbildung geht *Lagrange* überhaupt nicht ein.] Immerhin bilden *Euler*'s Untersuchungen eine wichtige Vorarbeit zu denen von *Lagrange* und sind für die Entwickelung der Theorie von erheblicher Bedeutung gewesen. Ihre Veröffentlichung in der vorliegenden Sammlung dürfte um so mehr gerechtfertigt sein, als die Acta der Petersburger Akademie, in denen sie erschienen sind, nur Wenigen zugänglich sind. Diesem Umstande ist es auch wohl zuzuschreiben, dass sie nicht so bekannt sind, wie sie es verdienen. So erwähnt z. B. *Jacobi* in seiner nachgelassenen Arbeit über die conforme Abbildung des dreiaxigen Ellipsoids (*C. G. J. Jacobi*'s Gesammelte Werke, Band II, Berlin 1882, S. 399) zwar *Lambert* und *Lagrange*, aber nicht *Euler*.

In der vorstehenden Darlegung des Verhältnisses der *Euler*schen Arbeiten zu denen von *Lambert* und *Lagrange* ist eine kurze Inhaltsangabe der beiden ersten der vorliegenden Abhandlungen enthalten. Eigenartig ist die dritte Abhandlung; sie entwickelt die Gesichtspunkte, die bei der für die grosse Karte des russischen Reiches benutzten Projection, der sogenannten *De Lisle*'schen, besser *Mercator*'schen (vgl. die folgende Anmerkung 27), in Frage kommen, und erörtert, wie man die Fehler einer derartigen Karte möglichst verringern kann (vgl. § 6, S. 55). Diese dritte Abhandlung wird daher mehr den Geographen, der die praktische Anwendung im Auge hat, interessiren, während die beiden ersten hauptsächlich für den Mathematiker wichtig sind.

Die Originaltitel der drei Abhandlungen, sowie die Stelle der ersten Veröffentlichung sind oben bei den einzelnen Titeln angegeben; auch die Seitenzahlen des Originals sind der

Uebersetzung beigefügt. Die Eintheilung des Originals in Paragraphen ist beibehalten; nur in der Bezeichnung der Paragraphen musste eine Aenderung vorgenommen werden (vgl. Anmerkung 5). Die Uebersetzung ist nicht überall wortgetreu, sondern es wurde mehr Gewicht darauf gelegt, den Sinn wiederzugeben. Einzelne der grösseren Deutlichkeit wegen gemachte kurze Zusätze (z. B. S. 5, S. 12 Mitte, S. 16 unten, S. 28 unten etc.) sind als solche dadurch gekennzeichnet, dass sie in eckigen Klammern stehen. In den Formeln des Originals findet sich eine grössere Zahl von Druckfehlern, die hier verbessert sind; diese einzeln anzuführen, dürfte unnöthig sein. Was die Schreibweise der Formeln betrifft, so ist *Euler*'s Bezeichnung der partiellen Ableitungen durch beigesetzte Klammern beibehalten. Dagegen ist mehrfach statt der *Euler*'schen die moderne Schreibweise benutzt, indem z. B. p^2 statt pp, $\cos^2\varphi$ statt $\cos\varphi^2$, $\varDelta(Z)$ statt $\varDelta : Z$ etc. geschrieben ist. Der natürliche Logarithmus ist durch log statt durch l bezeichnet. Endlich sind an einigen Stellen statt der Differentiale die Differentialquotienten gesetzt.

Die Figuren sind mit geringfügigen, weiterhin anzugebenden, Aenderungen Copien der *Euler*'schen Figuren. Die Nummern der letzteren, die mit nicht zu unseren Abhandlungen gehörigen Figuren auf denselben Tafeln vereinigt sind, mussten geändert werden.

Specielle Noten zum Text.

Abhandlung I.

1) *Zu § 7, S. 8.* *Euler* setzt hier als bekannt voraus, dass eine Kugelfläche nicht in eine Ebene abgewickelt werden kann, und schliesst daraus, dass es unmöglich ist, den Gleichungen I—III des § 7 gleichzeitig zu genügen. Weiterhin weist er in § 9 diese Unmöglichkeit direct nach.

2) *Zu § 9, S. 8.* Die Bezeichnung »exacte Differentiale« kennt *Euler* noch nicht. In der Uebersetzung ist diese Bezeichnung überall benutzt, wo *Euler*, wie z. B. an der vorliegenden Stelle, sagt: »ut istae binae formulae integrabiles evadant«.

3) *Zu § 15, S. 12* und *§ 17, S. 13.* *Euler*'s Ausdrucksweise, dass dx einem Längengrade entsprechen soll etc. (*Euler* sagt »referat gradum«, an der zweiten Stelle »denotet

gradum«), ist nach modernen Begriffen unzulässig. Vielmehr würden hier die Differentiale durch endliche Zunahmen der Variabeln zu ersetzen sein mit dem Hinzufügen, dass für letztere die Differentialformeln noch angenähert gelten. —

Die Figur 3 ist im Original nicht ganz richtig gezeichnet; dort sind PR und QS nicht parallel EF, und der Winkel QPR ist kein rechter.

4) *Zu § 16, S. 12.* Betreffs *Mercator*'s vgl. Heft 54 der Klassiker, S. 85, Anmerkung zu § 9.

5) *Zu § 16ᵃ, S. 12, und § 33, S. 21.* *Euler* bezeichnet den § 16ᵃ eben so wie den vorhergehenden mit 16, so dass die Zahl 16 doppelt vorkommt. Dagegen fehlt später § 33 ganz. Um diese Unzweckmässigkeit zu vermeiden und andererseits mit *Euler*'s Bezeichnung der einzelnen Paragraphen in möglichster Uebereinstimmung zu bleiben, ist in der Uebersetzung dem zweiten § 16 die Nummer 16ᵃ gegeben, während der § 32 des Originals in die beiden Paragraphen 32 und 33 getheilt ist.

6) *Zu § 21, S. 15.* Dass die Curve in E unter dem Winkel ϑ gegen EF geneigt ist, folgt unmittelbar daraus, dass die kleinsten Theile der Kugel denen der Bildebene ähnlich sind, und hätte deshalb einer besonderen Ableitung nicht bedurft. — Die vorletzte Formel des § 21 enthält irrthümlich vor der Wurzel das Zeichen $\pm$ statt des allein richtigen $+$.

7) *Zu § 27, S. 19.* *Euler* hat die in § 26 gestellte Aufgabe in § 27 auf die Bestimmung einer Function r zurückgeführt, bricht dann aber ab und sucht andere Lösungsmethoden. — Auch der in § 27 eingeschlagene Weg hätte zum Ziele geführt. Die Bedingung dafür nämlich, dass die rechte Seite der letzten Gleichung S. 18 ein exactes Differential ist, lässt sich, wenn man, wie in § 44, an Stelle von u die Variable

$$s = \int \frac{du}{\cos u} = \log \operatorname{tang} (45^0 + \tfrac{1}{2}u)$$

einführt, auf die Form bringen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2 (r \cos u)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 (r \cos u)}{\partial s^2} = 0.$$

Die allgemeine Lösung von (a) kann man so schreiben:

$$r \cos u = f(s + t\sqrt{-1}) + f_1(s - t\sqrt{-1}),$$

falls f eine willkürliche Function, f_1 die conjugirte Function bezeichnet. Aus r ergiebt sich mittelst der letzten Gleichung von S. 18 p, und daraus folgen x und y. Um die Ausdrücke für x und y zu erhalten, die weiterhin in § 44 sich ergeben, hat man nur $f = -f_1 = \sqrt{-1}\;\Gamma'$ zu setzen, wo Γ' die Ableitung der in § 44 auftretenden Function Γ bezeichnet. — Auch die in den §§ 29—41 untersuchten Particularlösungen hätten sich unmittelbar aus Gleichung (a) ableiten lassen.

8) *Zu S. 19* und *26.* Im Original heissen die Ueberschriften: »Methodus particularis (S. 26 Methodus generalis) resolvendi aequationes« etc.

9) *Zu § 41, S. 26.* Die Bildung der allgemeinen Lösung aus den Particularlösungen beruht auf einer bekannten Eigenschaft linearer homogener Differentialgleichungen.

10) *Zu § 44, S. 28. Euler* setzt hier stillschweigend voraus, dass die Function Γ mit reellem Argumente reell ist. Bezeichnet allgemeiner Γ eine Function, die auch complex sein kann, so ist, wenn

$$x + y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma\left(\log s - t\sqrt{-1}\right)$$

ist, und wenn x und y selbst reell werden sollen,

$$x - y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma_1\left(\log s + t\sqrt{-1}\right)$$

zu setzen, wo Γ_1 die zu Γ conjugirte Function ist, d. h. diejenige, welche aus Γ durch Aenderung des Vorzeichens von $\sqrt{-1}$ entsteht.

11) *Zu § 45, S. 28.* Die hier angeführte Reihenentwickelung ist stets nur für ganzzahlige Werthe von λ statthaft, nicht aber ohne Weiteres auch für beliebige λ.

12) *Zu § 49, S. 31.* Die Endformeln des § 49 sind noch nicht so allgemein, wie die in § 40 entwickelten. Um letztere zu erhalten, müsste man einmal

$$Z = \sin\frac{z + \log\varepsilon - \delta\sqrt{-1}}{\mu}$$

nehmen, wo

$$z = \log s - t\sqrt{-1}$$

ist, während ε, δ, μ Constante bezeichnen, sodann

$$Z = \sin\frac{z + \log\varepsilon - (\delta + \delta_1)\sqrt{-1}}{\mu}.$$

Die Combination beider Lösungen würde dann auf die Formeln des § 40 führen.

13) *Zu § 50, S. 31.* Dass die Meridiane und Parallelkreise einander senkrecht schneiden, ist eine Folge der Aehnlichkeit der kleinsten Theile, nicht eine daneben bestehende Eigenschaft. — Wie man zeigt, dass für beliebig gestaltete kleinste Theile die Aehnlichkeit gilt, darüber vgl. die folgende Anmerkung 20.

13[a]) *Zu § 51, S. 31.* Die in Rede stehende Projection bezeichnet man gewöhnlich als stereographische Polarprojection. Bei y ist wieder, wie oben, das Vorzeichen in das entgegengesetzte verwandelt; ferner sind die in den Formeln des § 48 auftretenden Factoren fortgelassen.

14) *Zu § 54, S. 33.* Die Lösung der hier besprochenen Aufgabe führt, falls man noch $k^2 = z$ setzt, auf die nicht lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{z}\right)}{\partial v^2} = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lässt sich nicht in geschlossener Form darstellen.

15) *Zu § 59, S. 37.* Zu dem hier Gesagten ist Folgendes zu bemerken. Dass bei der Integration der Gleichung $dt = -\alpha dT$ die willkürliche Constante fortgelassen ist, ist deshalb zulässig, weil man einen beliebigen Meridian als Anfangsmeridian wählen kann. Ferner sind die Constanten c und α durch folgende Bedingungen bestimmt. Soll der Punkt, in dem die Meridiane der Karte zusammenlaufen, das Bild des Poles sein, so muss, falls man sich auf die nördliche Halbkugel beschränkt, für $u = 90^\circ$, d. h. $v = 1$, $x = 0$ und $y = 0$, mithin $c = -1$ werden, und α muss negativ sein. Sollen endlich die Meridiane der Karte dieselben Winkel mit einander bilden, wie auf der Kugel, so muss $\alpha = -1$ sein. Die Formeln des § 59 werden dann:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2(1 - \sin u)} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right), \ \frac{y}{x} = \operatorname{tang} t.$$

Das Bogenelement eines Meridians der Karte wird, absolut genommen,

$$d\sigma_1 = -d\sqrt{x^2 + y^2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) du,$$

das Bogenelement eines Parallelkreises dagegen

$$d\sigma_2 = \sqrt{x^2 + y^2}\, dt = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) dt,$$

während die entsprechenden Bogenelemente der Kugel sind:

$$ds_1 = du, \quad ds_2 = \cos u\, dt = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) dt.$$

Daraus folgt

$$\frac{d\sigma_1}{ds_1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right), \quad \frac{d\sigma_2}{ds_2} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)}.$$

Hieraus erkennt man die Grösse der Verzerrung, die, ausser am Pol, immer eintritt. Die Gestalt, die irgend ein Gebiet auf der Karte hat, weicht nur dann nicht erheblich von der Wirklichkeit ab, wenn das Gebiet in der Nähe des Poles liegt.

Abhandlung II.

16) *Zu § 1, S. 38* und *§ 1, S. 53*. *Euler* sagt: »Ambo Haemisphaeria, superius scilicet et inferius.«

17) *Zu § 2, S. 39*. Die hier benutzten Formeln sind die in § 44, resp. 47 abgeleiteten, in denen $90^\circ - u = v$ gesetzt und die willkürliche Function mit $\varDelta$ statt mit $\varGamma$ bezeichnet ist. Dass in den drei Ausdrücken für x, resp. y $\varDelta$ nicht dieselbe Function des beigesetzten Arguments bezeichnet, sondern nur allgemein zur Bezeichnung einer willkürlichen Function benutzt wird, wird das Verständniss nicht erschweren. Vielleicht wäre es zweckmässiger gewesen, in jenen Ausdrücken verschiedene Functionszeichen zu benutzen.

18) *Zu § 3, S. 39*. Gewöhnlich nimmt man bei der sogenannten stereographischen Projection als Projectionsebene nicht die Tangentialebene in dem dem Augenpunkte entgegengesetzten Punkt, sondern die durch den Kugelmittelpunkt gehende Ebene, die dieser Tangentialebene parallel ist (vgl. Nr. 55 der Klassiker, S. 4 unten). Das Bild der Tangentialebene ist das auf den doppelten Maassstab vergrösserte Bild der Centralebene.

Der Name »stereographische Projection« ist von dem belgischen Mathematiker Aguillon oder Aguilonius (1566—1617)

eingeführt und hat sich, obwohl er wenig zweckmässig ist, allgemein eingebürgert. — Die hier erörterte Projectionsart pflegt man als stereographische Horizontalprojection (Projection auf den Horizont von C) zu bezeichnen.

19) *Zu § 5, S. 40, 41.* Im Anfang des § 5 hätte hinzugefügt werden müssen, dass m auf dem Kreise AM liegt. Ferner ist der *Euler*'sche Beweis in so fern incorrect, als von vorne herein die Winkel ASC und AsC, die sich um einen unendlich kleinen Winkel unterscheiden, als gleich angenommen werden. Strenger lässt sich die Ableitung so gestalten. Ist zunächst Mm ein Bogen von endlicher Grösse, so ziehe man die Sehne Mm. Dann ist der Winkel $AsC = ASC - MAm$. Andererseits ist Winkel AMm gleich der Differenz der Peripheriewinkel über den Bogen AM und Mm, d. h. $AMm = 90^\circ - \frac{1}{2}z - MAm$, mithin, da $ASC = 90^\circ - \frac{1}{2}z$, $AMm = AsC$. Hieraus folgt die Proportion $Mm : Ss = AM : As$; und falls Mm unendlich klein ist, kann der Bogen an Stelle der Sehne und zugleich AS an Stelle von As treten.

20) *Zu § 5, S. 41.* Zur Erläuterung diene folgende Bemerkung. Es sei Mn ein Bogenelement des durch M mit dem Radius MP beschriebenen Kreises, St die Projection von Mn. Dann verhalten sich St und Mn als Kreisbogen, die zu gleichen Centriwinkeln gehören (§ 4), wie die Radien, mithin eben so wie Ss zu Mm. Ferner ist Winkel $mMn = sSt = 90^\circ$, und daher sind die Dreiecke Mmn und Sst ähnlich. Hieraus folgt, dass ein beliebiges Bogenelement mn der Kugel gegen den durch seinen Endpunkt m gehenden Meridian unter demselben Winkel geneigt ist, wie die Projection von mn gegen die Projection des Meridians, und dass das Verhältniss von mn zu seiner Projection von dem eben genannten Winkel, d. h. von der Richtung von mn, unabhängig ist. Daraus ergiebt sich weiter, dass ein beliebig gelegenes unendlich kleines Kugeldreieck seiner Projection ähnlich ist; und endlich gilt dasselbe für beliebig gestaltete Flächenelemente, da man diese in Dreiecke zerlegen kann.

21) *Zu § 6, S. 41, 42.* Die Gleichheit der Winkel ECS und GCM folgt unmittelbar daraus, dass die Linie CS Tangente des Kreises CM in C ist. Aus demselben Grunde gilt für SC die Formel des § 3. — In der *Euler*'schen Figur 5 fehlt die gerade Linie CS, wie überhaupt an dieser Figur mehrfache Aenderungen anzubringen waren. — Statt

»bezogen auf den Meridian GC als Anfangsmeridian« (S. 41, letzte Zeile) steht im Original »longitudinem loci M in Meridiano GC«.

22) *Zu § 7, S. 42.* Betreffs der Ableitung der folgenden Formel vgl. Heft 73 der Klassiker, S. 42.

23) *Zu § 11, S. 44.* Etwas einfacher wird die Rechnung, wenn man wie in § 12 verfährt.

24) *Zu § 14, S. 47.* Nicht nur alle grössten Kugelkreise ergeben in der Projection wieder Kreise, sondern dasselbe ist mit allen beliebigen auf der Kugel gezogenen Kreisen der Fall. Das folgt einfach daraus, dass die Bilder der Parallelkreise Kreise sind, und dass der Pol der Parallelkreise eine beliebige Lage auf der Kugel hat.

25) *Zu § 15, S. 48.* Zu bemerken ist, dass, da CO von β unabhängig ist, die Mittelpunkte aller Meridiane der Karte auf derselben Linie ON liegen.

26) *Zu § 20, S. 52.* Das über die Verzerrung Gesagte folgt daraus, dass für Punkte, die nicht weit von einander entfernt sind, die lineare Vergrösserung sehr wenig verschieden ist. Betreffs des letzten Satzes vgl. Anmerkung 24.

Abhandlung III.

27) *Zu S. 53* und *55. De Lisle* [auch *de l'Isle* geschrieben], *Joseph Nicolas*, am 4. April 1688 zu Paris geboren, widmete sich vorzugsweise astronomischen und, wie sein Vater und drei seiner Brüder, geographischen Studien. Er wurde 1726 unter Katharina I. nach Petersburg berufen, wo er eine astronomische Schule gründete. Neben der Astronomie hat er sich um die Geographie Russlands, das er nach verschiedenen Richtungen hin durchreiste, verdient gemacht. 1747 kehrte er nach Paris zurück und starb dort am 11. September 1768, von seinen Zeitgenossen fast vergessen. Den Plan, eine Karte des russischen Reiches zu entwerfen, fasste er schon in der ersten Zeit seiner Petersburger Thätigkeit.

Uebrigens ist die nach *De Lisle* genannte Projection, die zu den sogenannten konischen Projectionen (vgl. Anm. 29) gehört, schon vor ihm von *Mercator* benutzt in seinen »Galliae, Belgii inferioris et Germaniae tabulae«, Duysburgi 1585.

27[a]) *Zu § 1, S. 53. Hasius, Johann Matthias* (auch *Haas*, *Haase* und *Hase* genannt), war am 14. Januar 1684 zu Augs-

burg geboren, wurde 1720 Professor der Mathematik in Wittenberg und starb daselbst am 24. September 1742. Er gab Karten verschiedener Länder heraus (Ungarn, Russland, China, Afrika) und entwarf ausserdem historische Karten. — Betreffs des vorletzten Satzes von § 1 vgl. Anmerkung 13.

28) *Zu § 2, S. 53* und *54.* Das hier Gesagte setzt voraus, dass es sich um die sogenannte stereographische Aequatorial-Projection handelt, bei der der Augenpunkt ein Punkt des Aequators ist, also um die übliche Abbildung der östlichen und westlichen Halbkugel, während doch nach § 1 *Euler* eine stereographische Projection im Auge hat, bei der der Augenpunkt eine beliebige Lage hat.

29) *Zu § 7, S. 56.* Es ist durchaus nicht nöthig, die Kreisbogen Pp, Qq durch gerade Linien zu ersetzen; die Proportion in § 8 gilt auch für Kreisbogen streng.

Uebrigens kann man die in Rede stehende Projection folgendermaassen entstanden denken. Um die Kugelzone, die von den durch A und B gehenden Parallelkreisen begrenzt wird, oder einen Theil dieser Zone abzubilden, denke man sich denjenigen geraden Kegel, der durch die Parallelkreise der Punkte P und Q geht, und übertrage die Kugelzone derart auf die Kegelfläche, dass den Meridianen der Kugel die Geraden des Kegels, allen Parallelkreisen der Kugel aber Parallelkreise des Kegels entsprechen. Die Parallelkreise P und Q der Kugel gehen dabei in sich selbst über, jeder andere Parallelkreis der Kugel in einen solchen Kreis des Kegels, dessen Abstand von der Spitze O gleich dem Polabstand des betreffenden Kugelkreises, vermehrt um eine gewisse Constante, ist. Nachher wickle man den Kegelmantel in eine Ebene ab.

30) *Zu § 10, S. 57.* Die Gleichung

$$\omega = \frac{Pp}{PO}$$

giebt den Winkel ω, ausgedrückt durch das Verhältniss des Bogens zum Radius. Ist aber ω in Graden ausgedrückt, so ist

$$\frac{Pp}{PO} = \alpha\omega,$$

wo $\alpha = \frac{1}{180}\pi = 0{,}01745329$ ist, d. h. es ist

$$\alpha\omega = \frac{\delta(\cos p - \cos q)}{q - p} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{\delta(\cos p - \cos q)}{\alpha(q - p)}.$$

In dem angegebenen Werth von ω ist statt $6''$ besser $5''$ zu setzen.

31) *Zu § 12, S. 58.* Es ist Bogen $Aa = AO \cdot \alpha\omega = (90^\circ - a + z)\,\alpha\omega$, und setzt man den Ausdruck für $\alpha\omega$ aus Anmerkung 30 ein, so folgt die Formel des Textes.

32) *Zu § 15, S. 59.* Darauf, dass der grösste Fehler in der Mitte liegt, gelangt man durch folgende Betrachtung. Ist $f(x)$ der Fehler für die Breite x, so wissen wir, dass $f(x)$ für $x = p$ und $x = q$ verschwindet. Dieser Bedingung genügt die Function

$$f(x) = m(x - p)(x - q).$$

m könnte zwar noch eine Function von x sein; der Einfachheit halber nehmen wir m als constant an. Dann ist $f'(x) = 0$ für $x = \frac{1}{2}(p + q)$. Da ferner die Fehler in A und B gleich sein sollen, so ist

$$m(a - p)(a - q) = m(b - p)(b - q),$$

woraus

$$a + b = p + q$$

folgt, d. h. der Maximalfehler liegt an der Stelle $x = \frac{1}{2}(a + b)$. Aus obiger Form von $f(x)$ folgt ferner unmittelbar, dass der Fehler an der Stelle $x = \frac{1}{2}(a + b)$ das entgegengesetzte Zeichen hat wie an den Stellen $x = a$ und $x = b$.

Wenn die in Bezug auf $f(x)$ gemachte Annahme auch nicht genau der Wirklichkeit entspricht, so bildet sie doch eine erste Annäherung an dieselbe. Vgl. übrigens § 18 und folgende.

33) *Zu § 17, S. 60.* Die Resultate sind nicht genau; vielmehr müsste es heissen

$$\omega = 48'35'', \quad z = 4^\circ 53'.$$

34) *Zu § 18, S. 61.* Der Winkel x ist in Graden ausgedrückt; für ihn ist daher das Verhältniss von Bogen zu Radius $x' = \alpha x$. Um die üblichen analytischen Formeln anwenden zu können, muss man $\cos x'$ statt $\cos x$ schreiben. Dann sieht man, dass

$$d\cos x' = -\sin x'\,dx' = -\sin x' \cdot \alpha\,dx$$

ist, und für $\sin x'$ ist wieder $\sin x$ gesetzt.

Der Werth von x ist genauer $x = 54^\circ 4{,}7'$.

35) *Zu § 19, S. 62.* Die genaueren Werthe sind

$$z = 4^\circ 53{,}5', \quad \omega = 48'35''.$$

36) *Zu § 20* und *21*, *S. 62*. Der hier benutzte Werth von $\alpha\omega$ ist ungenau, vielmehr ist $\alpha\omega = 0{,}014134$. Damit und mit dem genaueren Werthe von z (Anmerkung 35) ergiebt sich der Fehler $= 0{,}00980$ statt $0{,}00946$. Danach ändern sich auch die folgenden Zahlen ein wenig. Die wirkliche Länge eines Grades auf dem Parallelkreis A ist $0{,}77584$, der Fehler beträgt hier $0{,}147$ Meilen; bei B ist der Fehler der 35. Theil der Länge.

Auch in § 21 sind die Zahlen entsprechend den in Anmerkung 35 und 36 angegebenen zu ändern.

37) *Zu § 22*, *S. 62*. Daraus, dass die Meridiane gerade Linien sind, kann man nur schliessen, dass grösste Kugelkreise, die nahe einem Meridian verlaufen, nahezu gerade Linien sind. Die Ersetzung der Bilder beliebiger grösster Kugelkreise durch gerade Linien, resp. durch Kreise, wie in den folgenden Paragraphen, kann nur als eine sehr rohe Annäherung angesehen werden. Welche Abweichungen von der Wirklichkeit man dabei erhält, hat *Euler* gar nicht erörtert. Man kann diese Abweichungen auf folgende Weise ermitteln. Ein grösster Kugelkreis, der auf dem Meridian $t = 0$ senkrecht steht und denselben in der Breite u_0 schneidet, hat die Gleichung:

$$1) \qquad \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} u_0 \cdot \cos t.$$

Um die Curve der Karte zu erhalten, welche das Bild dieses Kreises ist, denke man die Punkte der Kartenebene durch Polarcoordinaten ϱ, ϑ bestimmt, deren Pol der Punkt O ist. Dann ist, wenn man die Länge eines Meridiangrades der Karte zur Längeneinheit nimmt:

$$2) \qquad \varrho = 90^\circ - u + z, \quad \vartheta = \omega t.$$

ω ist dabei als Theil eines Grades auszudrücken, d. h. $\omega = 0{,}80983$ zu setzen. Demnach wird das Bild des grössten Kreises 1):

$$3) \quad \operatorname{tang}(90^\circ + z - \varrho) = \operatorname{tang}(90^\circ + z - \varrho_0) \cos\left(\frac{\vartheta}{\omega}\right).$$

Andererseits hat die Gerade, welche in der Breite u_0 auf dem Meridian $t = 0$ senkrecht steht, die Gleichung

$$4) \qquad \varrho = \frac{\varrho_0}{\cos\vartheta}.$$

Die Vergleichung der durch die Gleichungen 3) und 4) bestimmten Werthe von ϱ würde für die verschiedenen ϑ die Abweichung der Curve 3) von der Geraden 4) ergeben.

38) *Zu § 23, S. 63. Euler* sagt statt Schnittpunkt »Pol«. Dieser Ausdruck ist unzweckmässig, da man unter Pol eines Kugelkreises etwas Anderes versteht.

39) *Zu § 24, S. 63.* Dass längs FG keine Verzerrung stattfindet, ist nicht bewiesen. Wenn auch FG nahezu $= 90^{\circ}$ ist, also nahe gleich der Länge des entsprechenden Bogens der Kugel, folgt daraus noch nicht, dass gleichen Theilen von FG stets auch gleiche Bogen des Kugelkreises entsprechen.

Halle a. S., October 1897.

A. Wangerin.

Inhaltsverzeichniss.

Euler's Abhandlungen.

Anmerkungen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Nr. 44. Das Ausdehnungsgesetz der Gase. Abhandlungen von **Gay-Lussac, Dalton, Dulong** u. **Petit, Rudberg, Magnus, Regnault.** (1802-1842.) Herausg. von W. Ostwald. Mit 33 Textfiguren. (213 S.) *M* 3. —.

» 52. **Aloisius Galvani,** Abhandlung üb. d. Kräfte der Electricität bei der Muskelbewegung. (1791.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 21 Fig. auf 4 Taf. (76 S.) *M* 1.40.

» 53. **C. F. Gauss,** Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass zurückgeführt. In der Sitzung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 15. December 1832 vorgelesen. Herausgegeben von E. Dorn. (62 S.) *M* 1.—.

» 54. **J. H. Lambert,** Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausgegeben von A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) *M* 1.60.

» 55. **Lagrange** u. **Gauss,** Abhandlungen über Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausgegeben von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) *M* 1.60.

» 56. **Ch. Blagden,** Die Gesetze der Überkaltung und Gefrierpunkts-erniedrigung. v. Oettinge

» 57. **Fahrenheit,** (1724, 1730– Mit 17 Fig.

» 59. **Otto von G** leeren Raum Anmerkunge 15 Textfigur

» 61. **G. Green,** Ei der Elektrici 1828 in Not A. Wanger

» 63. **Hans Christ** deckung des von A. J. v.

» 69. **James Cler** 1856.) Her

» 70. **Th. J. Seeb** durch Temp A. J. von C

» 76. **F. E. Neuma** aus den Gle A. Wange

» 79. **H. Helmhol** bewegungen wegungen. (

» 80. —— Theor (1859.) H

» 81. **Michael Fa** I. u. II. Rei A. J. von Oettingen. (96 S.) *M* 1.50.

» 86. —— —— III. bis V. Reihe. (1833.) Mit 15 Figuren im Text. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (104 S.) *M* 1.60.

» 87. —— —— VI. bis VIII. Reihe. (1834.) Mit 48 Figuren im Text. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. (180 S.) *M* 2.60.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 9 Fig. im Text. (78 S.) *M* 1.20.

» 96. **Sir Isaac Newton's** Optik oder Abhandlung über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichts. (1704.) Übersetzt und herausgegeben von William Abendroth. I. Buch. Mit dem Bildniss von Sir Isaac Newton u. 46 Fig. im Text. (132 S.) *M* 2.40.